TIDSKRIFT
FÖR
ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1928—1929

TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,

J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

TOLFTE ÅRGÅNGEN

1928—1929

STOCKHOLM

ALBERT BONNIERS FÖRLAG

(Svenska Bokförlaget)

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1929

Tolfte årgångens innehåll.

Sid.

AHLSTRÖM, GÖSTA. Ett försök över elektrolytisk polarisation 29
ANDERSSON, JOSEF. Anm. av *Gustav Eriksson*, Lärobok i sannolikhetskalkyl 170
AURÉN, T. E. Enkla försök för att påvisa den ultravioletta och den ultraröda strålningen 196
BECKMAN, BENGT. Den piezoelektriska kvartsresonatorn 199
BENNER, S. En metod att uppnå ytterst höga spänningar 226
BERGGREN, B. Apparat för demonstration av fasdifferenser 162
— — Hemmagjorda reostater 227
BERGHOLM, C. Avståndet för tydligt seende 15
— — Anm. av *Kosmos* 165
BJÖRKESON, ALBERT. Ett elektrolysförsök 86
— — Försök med longitudinell stående vågrörelse 138
BLOM, C. E Anm. av *J. K. Eriksen og J. Kofoed*, Fysik for Gymnasiet 38
— — Anm. av *Max Grenander*, Ur fysikens historia 107
— — En triangels medianer (ref.) 230
— — Anm. av *J. Körner*, Sveriges Elektricitetsverksindustri 234
BÅGMAN, S. Anm av *T. Hagren*, Planimetri och stereometri 40
BÄCKLIN, ERIK. Absolute Wellenlängenbestimmungen der Röntgenstrahlen (ref. av gradualavh.) 111
BÄCKSTRÖM, HELMER. Decimalskattningen vid avläsning av symmetriska skalor (ref. av gradualavh.) 44
— — »Camera-obscura»-fenomenets omvändning 84
— — Anm. av *W. Volkman*, Die Linsenoptik in der Schule 97
— — Den fotografiska negativprocessen 143
CARLSSON, LORENS. Stereometriska modeller 12
EDQVIST, T. Ett stroboskopiskt försök 159
— — Till Dopplerska principens metodik 229
HENNICHS, SAMUEL. Biokemiska arbetsmetoder och problem 215
HEUBERGER, J. F. Reaktionskinetische Studien an der spontanen Kohlensäureabspaltung der Nitroessigsäure (ref. av gradualavh.) 110
HÄGG, GUNNAR. X-Ray Studies on the Binary Systems of Iron with Nitrogen etc. (ref. av gradualavh.) 243
JOHANSSON, C. H. En anordning för erhållande av stora vinkelhastigheter med rotor utan fast axel 21

Sid.
JOSEPHSON, OLOF. Anm. av *H. Wieleitner*, Infinitesimalrechnung..... 233
JÖNSSON, EDVIN. Absorptionsmessungen im langwelligen Röntgengebiet und Gesetze der Absorption (ref. av gradualavh.)..... 45
KÄLLÉN, Y. Om aritmetiska serier av högre ordning..... 135
LING, C. U. Bestämning av isens smältvärme 95
LUNDBLAD, RAGNAR. Fysikaliska uppgifter 59, 184
MARTENS, ERIK. A research of the spherical dynamical equilibrium-distribution of stars of unequal masses (ref. av gradualavh.) ... 47
MEBIUS, C. A. Bestämning av de r-lediga summorna av n givna tal ... 8
NILSSON, HJALMAR. Anm. av *I. Malmborg*, Handledning vid experimentell fysikundervisning 36
NORDEFELDT, E. Anm. av *J. F. Nordwall*, Lärobok i kemi för folkskoleseminarier etc. 105
NORDWALL, J. F. Empirisk kemiundervisning, ett genmäle 230
NYSTRÖM, BENGT. Anm. av *J. S. Hedström* och *E. Öije*, Aritmetik och ekvationslära samt av *K. Asperén* och *I. Damm*, Lärobok i räkning 101
ODQVIST, FOLKE. Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten (ref. av gradualavh.) 45
ÖLDENBURG, HENRIK. Om införandet av potenser och logaritmer vid undervisningen i gymnasiet..... 4
OLSON, HJALMAR. Anm. av *S. Bågman*, Stereometri för gymnasiet ... 166
PARCK, KNUT. Molekylviktsbestämningar enl. luftförträngningsmetoden 109
— — Lunds Katedralskolas kemiska institution 155
PERSSON, P. G. Anm. av *Bengt Nyström* och *Hjalmar Olson*, Funktionslära och analytisk geometri 100
PETRINI, HENRIK. Allmänna metoder vid geometriundervisningen 65, 129, 193
PETTERSSON, J. P. Anm. av *K. Tham*, Plangeometri 169
SCHALÉN, CARL. The space distribution of B and A type stars in bright and dark galactic regions (ref. av gradualavh.) 172
SCHMIDT, E. Nya Mersenneska tal..... 10
SEBELIUS, HUGO. Zur Kenntniss der Laktone, namentlich ihrer Hydrolyse (ref. av gradualavh.)..... 172
STARCK, GUNNAR. Två kemiska försök 32
— — Anm. av *K. Parck*, Handledning vid kemiska laborationsövningar 42
— — Ref. av *H. Bäckströms* gradualavh. 45
— — Nya undersökningar över isotopi 88
— — Anm. av *P. Nylén* och *N. Wigren*, Elementära kemiska räkneuppgifter 106
STRÖMBERG, RAGNAR. Adsorptionsmessungen mit einer verbesserten Mikrowage (ref. av gradualavh.) 44
UHLER, ARVID. Om utvecklingen av cot πz i partialbråk och av sin πz i oändlig produkt..... 1

Sid.

WETTERBLAD, TORSTEN. Kapacitet och självinduktion i växelströmsläran ... 76
— — Anm. av *Meddelande om ny materiell*, häft. 5 ... 98
— — Kirchhoffs andra strömförgreningslag ... 160
— — Anm. av *Handbuch der Physik*, Geschichte der Physik, Vorlesungstechnik ... 164

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1927—28 ... 113
Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken 1927—28 ... 54
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna h. t. 1928 123
— — v. t. 1929 ... 251
Provräkning i realskolexamen h. t. 1928 ... 128
— — v. t. 1929 ... 255
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 55, 117, 181, 247
— —: Fysikaliska uppgifter (förf. av R. Lundblad) ... 59, 184
Gradualavhandlingar (autoreferat): HELMER BÄCKSTRÖM (44), RAGNAR STRÖMBERG (44), HANS BÄCKSTRÖM (45), EDVIN JÖNSSON (45), FOLKE ODQVIST (45), ERIK MARTENS (47), JOSEF HEUBERGER (110), ERIK BÄCKLIN (111), HUGO SEBELIUS (172), CARL SCHALÉN (172), GUNNAR HÄGG (243).
Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift, Svensk kemisk tidskrift, Vetenskapen och livet, Era, Industritidningen Norden, Radioamatören, Matematisk Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo), Den Høiere Skole (Oslo) ... 48, 113, 174, 245
Kataloger, referat av nyheter m. m.: Kritpassare, Magneter av koboltstål, Siemens Z-instrument, Weston Electric Instruments, Philips nyheter, Instrument från Gambrell Brothers, London och från Physikalische Werkstätten, Göttingen ... 50
Cenco Hyvac Pump, Zeiss Ikon Epidiaskop, Universalelektromagnet från Grave, Optik från Carl Zeiss ... 115
Från Norstedts skolmateriellavd., Skolradio, Rationell belysning. Philips, A. B. Kemiska Apparater ... 177
Bokanmälningar:
MALMBORG, Handledning vid experimentell fysikundervisning; ERIKSEN og KOFOED, Fysik for Gymnasiet; HAGREN, Planimetri och Stereometri; Uppfinningarnas bok, del IV; PARCK, Handledning vid kemiska laborationsövningar ... 36
VOLKMAN, Linsenoptik; NORSTEDT, Ny materiell; NYSTRÖM-OLSON, Funktionslära; HEDSTRÖM ÖIJE, Aritmetik och ekva-

Sid.

tionslära; ASPERÉN-DAMM, Lärobok i räkning; NORDWALL, Kemi; NYLÉN-WIGREN, Kemiska räkneuppgifter; GRENANDER, Ur fysikens historia; SÖRLIN, Kautschuken; BRANDT, Silket; SJÖBERG, Signaler; Tidens kalender 97

Handbuch der Physik I, Geschichte der Physik, Vorlesungstechnik; Kosmos, Sv. fysikersamfundets årsbok; BÅGMAN, Stereometri; THAM, Plangeometri; ERIKSSON, Sannolikhetskalkyl 164

WIELEITNER, Infinitesimalrechnung; KÖRNER, Sveriges Elektricitetsverksindustri; Stockholms gasverk, Minnesskrift; KRISTOFFERSON, Sprängämnen; COLBJÖRNSEN, Konstgödselmedel; Uppfinningarnas bok, del IX; BOMAN-WIKBERG, Läsebok för realskolan; BÄCKSTRÖM, Lärobok i fotografi; HUBENDICK, Bragdernas män; NILSSON, Astronomi för realskolan; PETTERSSON, Luften och klimatet; NORDENMARK, Stjärnklara kvällar; JANSEN, Er stjernerne beboet?; BJERKNES, Teoretisk fysikk 233

Insänd litteratur från följande förläggare:

Almqvist och Wicksell, H. Aschehoug, Oslo, J. Beckman, M. Bergvall, Albert Bonnier, G. Braun, Karlsruhe, C. E. Fritze, Hugo Geber, C. W. K. Gleerup, Gyldendalske Boghandel, København, I. Hæggström, J. A. Lindblad, P. A. Norstedt & Söner, van Nostrand Co., New York, Otto Salle och J. Springer, Berlin, Svenska Bokförlaget, Tidens förlag, Wahlström och Widstrand 64, 96, 180, 250

Annonsörer under året: A. B. Wilh. Becker, J. Beckmans Bokförlag, Elektraverken, A. B. Elektrostar, Tidskriften »Era», Rudolph Grave, Industritidningen Norden, Nerliens A. B., Nordiska Radiofabriken, P. A. Norstedt & Söners skolmateriellavdelning, Optiska Instrument A. B., Svenska Aktiebolaget Philips, Elektriska Aktiebolaget Siemens, Firma Georg Schönander (Zeiss, Jena), Svensk Filmindustri, Ingeniörsfirman Zander och Ingeström, Svenska Bokförlaget.

Tidskriften utkommer med fyra 64-sidiga nummer årligen (sept., dec., mars, juni). Pris för enkelt häfte 2 kr., för årgång 8 kr. Subskription kan ske i varje bokhandel, direkt hos förläggaren (Albert Bonnier, Stockholm) eller genom redaktionen. Sker subskription hos förläggaren eller redaktionen, sändes första häftet mot postförskott å 8 kr., övriga häften pr korsband portofritt. Dessa priser gälla även Danmark, Finland och Norge.

Redaktionens adress är: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16 IV, Stockholm Va.**

Om utvecklingen av $\cot \pi z$ i partialbråk och av $\sin \pi z$ i oändlig produkt.

Av ARVID UHLER.

För den högre matematiken erbjuder problemet att utveckla $\cot \pi z$ i partialbråk och $\sin \pi z$ i oändlig produkt föga svårigheter med de hjälpmedel, som där stå till förfogande. På ett mera elementärt stadium är det vanskligare att finna ett bevis, som icke är alltför vidlyftigt. Jag skall här göra ett försök till härledning, som endast förutsätter kunskap om likformigt konvergenta serier och integralkalkylens elementer och som ej är alltför vidlyftigt.

Vi utgå från identiteten

$$\frac{x}{1+x}+\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Man har nu, om vi utveckla vardera av termerna i geometrisk serie

$$\frac{x}{1+x}=\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}x^s+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x}$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}x^{-s}+(-1)^{n-1}\frac{x^{-n}}{1+x^{-1}}.$$

Varav

$$1=\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}(x^s+x^{-s})+(-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{1+x}+\frac{x^{-n}}{1+x^{-1}}\right).$$

Vi sätta $x=e^{i\varphi}$ och multiplicera med $ie^{-\mu i\varphi}$, där μ icke är ett heltal.

Vi få då

$$ie^{-\mu i\varphi}=\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^{s-1}i(e^{i\varphi(s-\mu)}+e^{-i\varphi(s+\mu)})+$$
$$+(-1)^{n-1}i\left(\frac{e^{i\varphi(n-\mu)}}{1+e^{i\varphi}}+\frac{e^{-i\varphi(n+\mu)}}{1+e^{-i\varphi}}\right).$$

Vi integrera nu med avseende på φ från 0 till φ $(-\pi<\varphi<\pi)$.

Vi få då

$$-\frac{e^{-\mu i\varphi}}{\mu}+\frac{1}{\mu}=\sum_{s=1}^{s=n-1}(-1)^s\left[\frac{e^{i\varphi(s-\mu)}}{\mu-s}+\frac{e^{-i\varphi(s+\mu)}}{\mu+s}\right]-$$
$$-\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^s\left(\frac{1}{\mu-s}+\frac{1}{\mu+s}\right)+R_n,$$

där
$$R_n=(-1)^{n-1}i\int_0^{\varphi}\left(\frac{e^{-i\varphi(n-\mu)}}{1+e^{i\varphi}}+\frac{e^{-i\varphi(n+\mu)}}{1+e^{-i\varphi}}\right)d\varphi.$$

Då $-\pi<\varphi<\pi$ tenderar R_n likformigt mot noll, då n växer över varje gräns, vilket man lätt konstaterar genom en delvis integration.

Vi låta då n växa över varje gräns, multiplicera med $e^{\mu i\varphi}$ och sätta

$$C=\frac{1}{\mu}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{2\mu}{\mu^2-s^2}.$$

Vi erhålla då en serieutveckling

$$Ce^{\mu i\varphi}=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{e^{i\varphi s}}{\mu-s}+\frac{e^{-i\varphi s}}{\mu+s}\right)+\frac{1}{\mu}$$

som är likformigt konvergent, då $-\pi<\varphi<\pi$.

Vi taga nu reella delen i båda membra, varav

$$C\cos\mu\varphi=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{2\mu\cos\varphi s}{\mu^2-s^2}+\frac{1}{\mu}.$$

Men serien i högra membrum är likformigt konvergent i intervallet $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$.

Vi kunna då integrera från $-\pi$ till π och erhålla då

$$\frac{2C \sin \mu\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Alltså $$C = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}.$$

Då är $$\cos \mu\varphi = \frac{\sin \mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\mu} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \frac{2\mu \cos \varphi s}{\mu^2 - s^2}\right),$$

giltig då $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$.

Sätta vi $\varphi = \pi$ och $\mu = z$ erhålla vi

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - s^2}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Integrera vi här mellan 0 och z få vi

$$\int_0^z \left(\pi \cot \pi z - \frac{1}{z}\right) dz = \log \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum_{s=0}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right).$$

Varav $$\sin \pi z = \pi z \prod_{s=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Vidare erhålla vi, om vi beakta de två olika uttrycken för C

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \frac{2z}{z^2 - s^2}.$$

Om införandet av potenser och logaritmer vid undervisningen i gymnasiet.

Av HENRIK OLDENBURG.

Vid införandet av potenser och logaritmer har man hittills väl i allmänhet gått så till väga, att man först definierat en potens för det fall, att exponenten är ett positivt bråk, $\frac{m}{n}$, varefter följt definitioner för de fall, då exponenten är ett irrationellt tal, negativt tal och noll.

Tillsammans med dignitetsdef. (exponenten = ett helt tal) får man således *fem* olika definitioner, som icke synas ha något sammanhang med varandra. Skall definitionen med stringens genomföras i det fall att exponenten är irrationell, så tarvas, att man bestämmer

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a^m},$$

varefter kontinuiteten av a^n följer. Såvitt jag vet, finnes icke i nu använda läroböcker någon som helst ansats att behandla denna fråga. I Haglunds Algebra av år 1888 beröres den däremot, men Haglund gör en blunder, i det han påstår, att

$$\lim_{n=\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,$$

därför att a^0 definitionsmässigt är satt lika med 1.

När nu dessa fem definitioner äro tagna till utgångspunkter, så skola de fem räknelagarna för potenser bevisas för varje fall. Ingen vill väl förneka, att detta blir synnerligen långrandigt. Jag tror icke jag misstager mig, om jag säger, att nyare läroboksförfattare helt och hållet negli-

gera det fall, att exponenten är ett irrationellt tal. Haglund däremot behandlar även detta fall; jfr ovan. Nu invändes sannolikt, att då i alla fall teorien för irrationella tal ej kunnat framställas med full stringens, så tjänar det intet till att fordra en sträng potensdefinition. Detta anser jag felaktigt. Framställningen bör vara sådan, att sedan den lucka, som frånvaron av full stringens vid framställningen av det fundament, som teorien för de irrationella talen bilda, blivit fylld — även om detta ej kan ske inom skolkursen — så skall allt, som därefter härletts, också vara så framställt, att det håller måttet.

Sedan potensläran genomgåtts, brukar man så införa logaritmfunktionen såsom potensfunktionens inversa funktion, varvid särskild hänsyn tages till basen 10. Åtminstone i äldre läroböcker, t. ex. Möllers, få lärjungarna även höra talas om ett märkvärdigt tal e, som definieras genom ett oändligt decimalbråk och anges vara synnerligen lämpligt att använda som bas i ett särskilt logaritmsystem, kallat det naturliga.

Skall nu logaritmfunktionens derivata beräknas, så tarvar detta, att man bestämmer

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

vilket icke lämpligen kan utföras på skolstadiet. Visserligen kan man med tillhjälp av funktionskurvan få fram derivatan, men detta förfaringssätt förefaller mig ej synnerligen lyckat, då det förutsätter, att man anger värdet av tangentens vinkelkoefficient, d. v. s. derivatan i en viss punkt.

För att undvika alla dessa nackdelar föreslår jag följande av mig under en lång följd av år använda lärogång, avsedd för fjärde ringen. Den medger ett enkelt och åskådligt framställningssätt och ger dessutom lärjungarna en inblick i en generell metod av fundamental betydelse; man studerar nämligen funktionen själv, då man känner dess derivata.

Sedan man visat geometriskt, att om $f(x)$ är en funktion,

som är kontinuerlig för varje x-värde tillhörande intervallet $a \leqq x \leqq b$ samt pos. för varje x sådant att $a < x < b$, så kan man för varje x tillhörande ovannämnda intervall definiera en funktion $F(x)$, som har $f(x)$ till derivata för varje x inom intervallet i fråga och som antager värdet noll för $x = a$, och generalisera detta teorem för det fall, att

$$a \leqq x \leqq b .$$

Att generalisera det för det fall, att $f(x)$ är neg., är icke nödvändigt för vårt närmaste ändamål. Man tillämpar så detta på funktionen

$$\frac{1}{x}, \; x > 0 .$$

Härigenom blir den naturliga logaritmfunktionen definierad som en funktion, som har $\frac{1}{x}$ till derivata och antar värdet noll för $x = 1$. Dess geometriska representation genom en area är då även klarlagd. Härefter härledes funktionens additionsteorem, varvid man utgår från att

$$\log(ax) \text{ och } \log(x)$$

ha samma derivata. Av additionsteoremet härledes övriga egenskaper hos funktionen, och funktionskurvan konstrueras.

Därefter definieras den naturliga exponentialfunktionen som den inversa funktionen till den naturliga logaritmfunktionen. Additionsteoremet härledes, och man får då anledning att införa symbolen e^x som funktionssymbol.

Då nu $\qquad e^{n \log a} = a^n$, n pos. helt tal,

så ger detta anledning att uppställa följande definition på potens, då exponenten är ett tal vilket som helst:

$$a^\mu = e^{\mu \log a} \; (a > 0) .$$

De fem räknelagarna för a^μ härledas.

a^μ betraktas som funktion av μ; denna funktion studeras och funktionskurvan konstrueras. Dess inversa funktion är ${}^a\log x$. Räknelagarna för denna härledas, och man inför speciellt Briggska logaritmer.

Slutligen betraktas a^μ som funktion av basen a.

I andra ringen skall den vanliga logaritmfunktionen framställas *för att användas vid numeriska räkningar.* Detta kan, oberoende av läran om potenser med annan exponent än hela pos. tal, ske på följande sätt. Man observerar, att talen i följden

$$1, a, a^2, \ldots, a^m, \ldots (a > 1)$$

hava den egenskapen, att produkten av två tal tillhörande följden även tillhör densamma. Multiplikation av tal, skrivna som potenser med samma bas, reducerar sig således till en addition av exponenterna. Man ger a värdet $\sqrt[n]{10}$ och visar, att, om n är mycket stort, talen i följden ligga mycket tätt, varför vilket tal som helst > 1 kan approximativt anses tillhöra följden. Om man då har approximativt

$$x = (\sqrt[n]{10})^m,$$

så kallas $\frac{m}{n}$ logaritmen för x, varefter lagarna för logaritmering av en produkt och en kvot bevisas. Dessa ge anledning till definition av $\log x$, då $0 < x < 1$, genom ekv.

$$\log x = -\log \frac{1}{x}.$$

Därefter kan funktionskurvan konstrueras och räknelagarna härledas samt tabellernas användning vid numeriska räkningar följa.

En utförlig motivering, varför den av mig här förordade lärogången är att föredraga framför den hittills använda på den algebraiska analysen grundade, finnes i Felix Klein: »Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus» 1. delen sid. 319—347. Detaljerna i framställningen av den naturliga logaritm- och exponentialfunktionen ansluta sig närmast till Jules Tannery: Notion de Mathématiques.

Bestämning av summan av de *r*-lediga summorna av *n* givna tal.

Av C. A. MEBIUS.

Låt $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ vara n tal vilka som helst, och låt deras summa vara s. Bildar man alla möjliga r-lediga summor av de n talen, så ingår t_1 icke uti en del av dessa, men ingår som term i de övriga. Borttages termen t_1 ur alla dessa sistnämnda, så återstå alla möjliga $(r-1)$-lediga summor av de $(n-1)$ talen $t_2, t_3, \ldots t_n$. Dessas antal är

$$\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.\ 2.\ \ \ldots\ (r-1)}.$$

Talet t_1 bidrager därför till de r-lediga summornas totalsumma med beloppet $\binom{n-1}{r-1} t_1$. På samma sätt inses, att t_2 bidrager till totalsumman med beloppet $\binom{n-1}{r-1} t_2$ o. s. v.

Totalsumman blir därför

$$S_r = \binom{n-1}{r-1}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$$

eller

$$S_r = \binom{n-1}{r-1} \cdot s.$$

Av detta resultat framgå åtskilliga satser, som verka överraskande, innan man tänkt igenom, att de äro ganska självklara.

1. Emedan i uttrycket för S_r ej ingå talen $t_1, t_2, \ldots t_n$ själva, utan endast deras summa, så inses, att

Om ett tal s uppdelas i n stycken termer vilka som helst, så är totalsumman av dessas r-lediga summor konstant.

2. Om $s=0$, så är också $S_r=0$. Alltså

Om n tal väljas så, att deras summa är noll, så är totalsumman av deras r-lediga summor för varje r också noll.

3. Om bland talen t_1, t_2 . . . t_n finnas par av formen $a \pm \sqrt{b}$ eller $a_1 \pm b_1\sqrt{-1}$, så är totalsumman av de r-lediga summorna rationell, om a är rationell, och reell, om a_1 är reell.

4. Då

$$S_1+S_2+S_3+ \ldots +S_n=$$

$$s+\binom{n-1}{1}s+\binom{n-1}{2}s+ \ldots +\binom{n-1}{n-1}s=2^{n-1}\cdot s,$$

så följer

Om ett tal s uppdelas i n termer, så är summan av alla de n möjliga r-lediga totalsummorna $2^{n-1}\cdot s$.

5. Då binomialkoefficienterna två och två äro lika i termer, som befinna sig på lika avstånd från början och från slutet i binomialutvecklingen, så är

$$S_r=S_{n-(r-1)},$$

d. v. s.

Totalsumman av de r-lediga summorna är lika med totalsumman av de $(n-(r-1))$-lediga.

Den första satsen kan användas för en räknelek eller s. k. »trollkonst», vilken kan formuleras sålunda:

Man låter en person uppskriva några tal och uppgiva talens antal och summa, men icke talen själva. Man ber honom därefter beräkna t. ex. de tvålediga summorna och sedan dessa summors summa, och man kan då omedelbart säga honom, till vilket resultat han kommit.

Nya Mersenneska tal.

Av E. SCHMIDT.[1]

Enligt F. Marin Mersenne är $2^q - 1$ ett primtal endast i de fall, att $q = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ o. s. v. (för övrigt har Seelhof bevisat, att $q = 61$ ger ett primtal, medan däremot $q = 67$ icke skulle ge ett primtal). För alla övriga q-värden är enligt Mersennes mening $2^q - 1$ ett sammansatt tal. Sådana tal kallas Mersenneska tal; de kunna säkrast påvisas därigenom, att man i dem kan fastställa en eller flera faktorer. En lärosats, som redan Euler har funnit (Commentationes aritmeticae collecte, Band 1, sid. 2) och sedermera Lucas ånyo har upptäckt, lyder nu:

»Har q formen $4k+3$, så är $2^q - 1$ delbart med $2q+1$, om detta tal är ett primtal.»

Med användning av denna sats kan man omedelbart för ett stort antal Mersenneska tal angiva den minsta faktorn; de äro i nedanstående tabell betecknade med E (= Eulers sats). För alla övriga äro i tabellen alla hittills bekanta primtalsfaktorer och minst en av deras upptäckare angivna.

Luckorna äro ännu så många, att det blir ett arbete för flera generationer att bekräfta Mersennes påstående.

Redan 1908 har jag upptäckt 3 nya Mersenneska tal:

$2^{181} - 1$ är delbart med 43 441,
$2^{197} - 1$ är delbart med 7 487,
$2^{263} - 1$ är delbart med 23 671.

Det andra av dessa tal har sedermera visat sig vara tidigare upptäckt, nämligen redan 1895 av A. Cunningham.

[1] Översättning från förf:s tyska manuskript.

q	Primfaktorer av $2^q - 1$	Upptäckare	q	Primfaktorer av $2^q - 1$	Upptäckare
11	23; 89	E.	139	?	—
23	47; 178 481	E.	149	?	—
29	233; 1 103; 2 089	Krafft	151	18 121	Le Lasseur
37	223; 616 318 177	Krafft	157	?	—
41	13 367; 164 511 353	Landry, Plana	163	?	—
43	431; 9 719; 2 099 863	Landry	167	?	—
47	2 351; 4 513; 13 264 529	Landry	173	?	—
53	6 361; 69 431; 20 394 401	Landry	179	359	E.
59	179 951; 3 203 431; 780 337	Landry	181	?	—
67	?	—	191	383	E.
71	?	—	193	?	—
73	439	Le Lasseur	197	?	—
79	2 687	Le Lasseur	199	?	—
83	167	E.	211	15 193	Le Lasseur
89	?	—	223	18 287	Le Lasseur
97	11 447	Le Lasseur	227	?	—
101	?	—	229	?	—
103	?	—	233	1 399	Le Lasseur
107	?	—	239	479	E.
109	?	—	241	?	—
113	3 391	Le Lasseur	251	503	E.
131	263	E.	263	?	—
137	?	—			

Vidare fann jag en andra faktor i ett Mersenneskt tal: $2^{179} - 1$ är även delbart med 1 433.

Slutligen kunde jag fastställa den minsta faktorn för flera Mersenneska tal för vilka $q > 263$ (bortsett från de fall, då den Eulerska satsen kan tillämpas); de skola senare offentliggöras.

Hermsdorf b. Berlin.

Stereometriska modeller.

Av LORENS CARLSSON.

Vid undervisningen i stereometri användas vanligen träeller pappmodeller samt trådmodeller. De förra äro i allmänhet rätt små och därför ej väl synliga över hela klassrummet. Därtill kommer, att diagonalsnitt och kantvinklar m. m. ej framträda synligt. Trådmodeller äro i sistnämnda avseende bättre, men då dessa i allmänhet äro dyrare i inköp, torde de ej hittills ha fått den användning, som de borde erhålla.

Sedan någon tid försäljer emellertid B. G. Teubners förlag i Leipzig ett utmärkt material för framställning av stereometriska figurer o. dyl.[1] Detta material tyckes, av firmans prospekt att döma, ha fått ganska stor användning i Tyskland vid såväl högre som lägre skolor. Materialet utgöres av runda trästavar med 4 mm diameter, vilka levereras i längder om 50 cm, böjliga peddigrör för framställning av cirklar, ellipser m. m. samt hylsor, muffar och bindtråd för sammanfogning av stavarna. Hylsor och stavar äro i flera färger, varigenom höjder, diagonaler o. dyl. kunna fås att tydligt framträda. De olika delarna kunna köpas dels i serier och dels styckevis. Av fig. 1 framgår, hur sammansättningen sker. Bindtråden trädes genom hylsan och klämmes fast mellan denna och rundstaven.

På prov inköpte jag en mindre låda material (Schülerkasten) à RM 3: 50, som med porto m. m. gick till ungefär kr. 5: —. Därav förfärdigades en *kub* med 27 cm kantlinjer i gult och diagonalsnitt och diagonaler i grönt, en *pyramid*

[1] Patenthülsen »Sphinx» zur Herstellung mathematischer, kristallographischer und anderer Modelle.

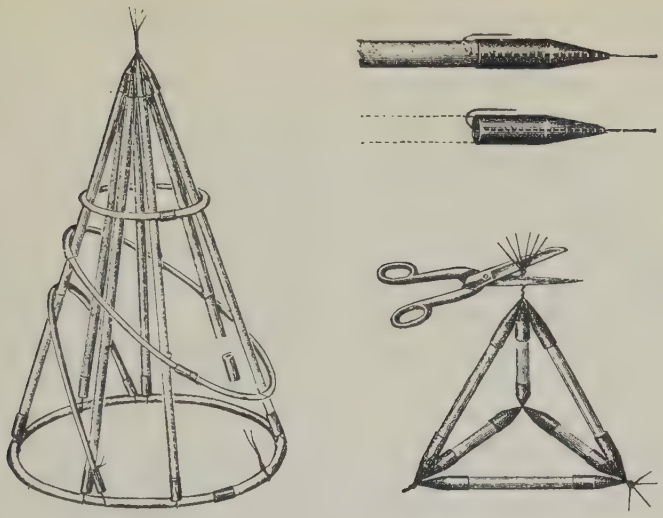


Fig. 1.

(se fig. 2) med kvadratisk basyta och sidoytor, bestående av liksidiga trianglar, i gult och med gröna stavar, representerande basytans diagonal, en normal från dess mittpunkt mot en kantlinje, pyramidens höjd och höjdlinjen i en sidoyta; dessutom tillverkades en regelbunden *tetraeder* samt en rät och en sned *parallellepiped.*

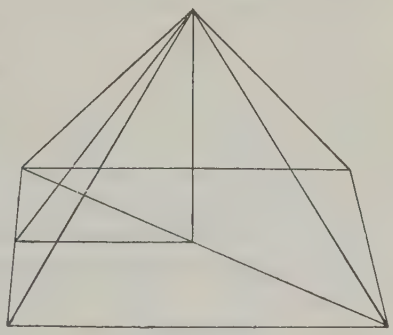


Fig. 2.

De tunna trådar (0,25 mm), som användas för att sammanbinda stavarna i hörnen äro stundom ej tillräckligt styva för att ge figuren nödig fasthet. För att undvika stödjande diagonalstavar, vilka kunna verka förvillande, kan man då vid sammanfogningen använda grövre metalltrådar. Trådarna sammanlödas över en vanlig ljuslåga; en bunsenlåga är väl het. Modellerna kunna tillverkas på lediga stunder i hemmet. Verktyg av särskilt

slag behövas nämligen icke, endast pennkniv, sax och lödmaterial.

Vill man visa, hur en perspektivisk avbildning av figurerna ter sig, kan man projicera dem på en vit skärm. De placeras i ett från en punktformig ljuskälla divergerande strålknippe, t. ex. framför en båglampa, som på lämpligt sätt avskärmas, eller framför en lins, som sammanbrutit ett strålknippe från en utbredd ljuskälla, såsom framför objektivet på en vanlig skioptikonapparat; dock bör därvid modellen placeras rätt nära skärmen, för att bilden skall bliva tillräckligt skarp. Även vid dagsljus, dock ej för starkt, framträder bilden fullt tydligt, varför mörkrum ej är nödvändigt. Sker projektionen i mörkrum, bör en eller annan lampa vara tänd, så att eleverna kunna se att kopiera projektionsfiguren, vilket kan ske på vanligt koordinatpapper. Såsom projektionsskärm har författaren använt en pappskärm av storleken 100×70 cm, indelad i kvadratiska rutor med 5 cm sida. Eleverna kunna då lätt göra avbildningen i skalan 1 : 5.

Fig. 2 visar en projektionsfigur av en pyramid; avståndet mellan ljuskällan och modellen var vid projektionen 1 m, avståndet mellan modellen och skärmen 1,6 m.

Detta är en enkel metod att lära eleverna perspektivisk teckning, särskilt användbar i de mellersta klasserna, där undervisningen i stereometri börjar.

Här beskrivna material lämpar sig för övrigt utmärkt till framställning av modeller för undervisningen i teckning, fysik och kemi, såsom till atommodeller, kristallmodeller o. dyl. Det har således en mångsidig användbarhet och förtjänar därför att uppmärksammas.

Avståndet för tydligt seende.

Av C. BERGHOLM.

Det är ett faktum, att många människor ådraga sig ögonsjukdomar eller förvärra nedärvda syndefekter genom att i tid och otid ansträng sina ögon. I en del fall orsakas ansträngningen av ogynnsamma yttre omständigheter, men i många fall torde nervositet spela största rollen. I sin iver att se varje detalj med största tydlighet anstränga nervösa personer sina synorgan alldeles i onödan. Fastän det är lättare sagt än gjort, borde varje människa försöka se utan onödig ansträngning.

Ett normalt öga är så byggt, att parallellt infallande strålar brytas samman till den gula fläcken på näthinnan, då ögat vilar. Enär det ljusknippe, som passerar pupillen är mycket smalt, uppfatta vi strålar från föremål på några meters avstånd från ögat som parallella. För att strålar från närmare liggande föremål skola sammanbrytas på näthinnan, måste ciliarmusklerna sammandraga sig, varigenom ögonlinsen erhåller en starkare välvning och alltså orsakar en kraftigare ljusbrytning. Samtidigt som föremålet kommer närmare ögat, blir bilden av föremålet på näthinnan större. Vi kunna därför urskilja flera detaljer, ju närmare föremålet kommer ögat. Men vinsten att se varje detalj med yttersta tydlighet erhålles ej utan möda. Att ackommodationen innebär en ansträngning av ögats muskler framgår tydligt därav, att man blir trött »i ögonen» av en längre tids närarbete.

Det s. k. avståndet för tydligt seende är som bekant olika för olika personer och ändras hos en och samma person med tilltagande ålder beroende på att linssubstansen hårdnar, så att ciliarmusklerna ej kunna sammanpressa den så

starkt. Man kan säga, att avståndet för tydligt seende eller synvidden till sin storlek bestämmes genom en kompromiss mellan önskan att se så många detaljer som möjligt med det obeväpnade ögat och den möda, som ackommodationen innebär.

Få uttryck inom fysiken torde hava blivit så allmänt missförstådda och felaktigt använda som avståndet för tydligt seende. Det vanligaste felet, som man gör sig skyldig till, är att man tillskriver avståndet för tydligt seende större betydelse än det verkligen har. I en hel del läroböcker återkommer synvidden som något fundamentalt vid behandlingen av luppen, mikroskopet, kikaren och glasögonen. Härigenom blir framställningen av de optiska instrumenten onödigt komplicerad och ibland fullkomligt felaktig. Tyvärr möter man avståndet för tydligt seende i en missvisande betydelse även bland de problem, som givits i studentexamen. I det följande skall jag redogöra för de vanligast förekommande felaktigheterna. Jag vill dock betona att uppsatsen ej tillkommit av personlig lust att kritisera. Den är skriven efter uppmaning av redaktionen för denna tidskrift. För övrigt äro de synpunkter, som här framföras, redan beaktade i undertecknads lärobok i fysik.

Som exempel på en missvisande användning av ordet synvidd anföres följande studentproblem (H. T. 1888): »I vilken punkt på huvudaxeln till en konkav spegel med 96 cm:s radie bör en person med 28 cm:s synvidd hålla ögat för att se en upp och nedvänd tydlig bild av detsamma?»

Uppgiften är möjlig att lösa endast under den förutsättningen, att man i ordet synvidd inlägger den felaktiga betydelsen, att personen i fråga ej kan se andra föremål tydligt än de som ligga 28 cm från ögat. Har personen däremot ett normalt öga, som har förmåga att ackommodera, kan han tydligen hålla ögat var som helst — dock minst några centimeter — bortom spegelns medelpunkt.

Denna missvisande användning av uttrycket synvidd eller avstånd för tydligt seende möter oss också vid behandling

av luppens förstoring. Man antager som bekant, att luppen hålles så, att den virtuella bilden faller på avståndet för tydligt seende från ögat räknat. Jag förnekar ej, att man kan ackommodera, så att bilden faller på t. ex. 20 cm:s avstånd från ögat, men man bör ej använda en lupp på detta sätt. Vid starkare förstoring står vinsten ej i rimlig proportion till mödan. Vid undervisningen borde man i stället med skärpa framhålla, att en lupp skall användas så, att ögonen ej i onödan ansträngas. Föremålet skall placeras i eller omedelbart innanför luppens fokalpunkt. De utgående strålarna bliva då parallella och ögat ser bilden utan ackommodation. Många personer, som på grund av sitt arbete ofta begagna lupp, hava ådragit sig allvarliga ögonskador genom att använda luppen felaktigt. Dessutom bör man ej sammanblanda luppens förstoring och — vad jag skulle vilja kalla — observatörens förstoring. Med förstoringen hos en lupp menas förhållandet mellan synvinkeln, under vilken ett föremål i fokalplanet synes genom luppen och synvinkeln, då samma föremål befinner sig på 25 cm:s avstånd. Siffran 25 är godtyckligt vald, men man har valt ett visst avstånd för att entydigt kunna fastställa begreppet »luppens förstoring», som naturligtvis bör vara en för varje lupp karakteristisk konstant, vilken är oberoende av långsynta och närsynta personers ögon. Enligt denna definition blir luppens förstoring $\frac{25}{f}$, där f är luppens fokaldistans uttryckt i cm. Formeln för luppens förstoring kan också skrivas $\frac{D}{4}$, där D är linsens dioptrital.

»Observatörens förstoring» är en individuell storhet, vilken beror av flera faktorer, såsom linsens styrka, ögats ackommodationstillstånd m. fl. Man kan säga, att »observatörens förstoring» är förhållandet mellan synvinkeln, under vilken ett föremål synes genom en lupp, då observatören ackommoderar för ett visst avstånd, och synvinkeln, då samma föremål befinner sig på ett angivet avstånd (jämförelseavståndet) från det obeväpnade ögat. Såväl jämförelseav-

ståndet som ögats ackommodationstillstånd variera från fall till fall. Att en närsynt person erhåller en annan förstoring än en långsynt torde vara klart. Under förutsättning att ögat hålles omedelbart intill linsen och jämförelseavståndet är konstant, blir »observatörens förstoring» ett maximum, då ögat ackommoderar så, att bilden faller i ögats närpunkt.

I detta sammanhang kan jag ej underlåta påpeka olämpligheten av att låta skolpojkar räkna ut, hur långsynta och närsynta personer se, då de använda något optiskt instrument. Med tillhjälp av glasögon kunna alla bliva normalseende. Likaväl som vi i matematiken slippa rörelseproblem, som behandla hastigheten hos låghalta och andra krymplingar, kunna vi i fysiken vid behandling av de optiska instrumenten — glasögonen undantagna — bortse från långsynta, närsynta, astigmatiska och starropererade personer.

De synpunkter, som här framställts, stå ej i överensstämmelse med de flesta uppgifter, som givits i studentexamen. Som exempel kan anföras följande uppgift (H. T. 1920): »En person, för vilken avståndet för tydligt seende är 24 cm, använder en samlingslins som lupp. Då linsen hålles omedelbart intill ögat, blir förstoringen $^5/_3$ av den, som erhålles, när avståndet mellan ögat och linsen är 10 cm. Hur stor är linsens brännvidd?» Författaren till uppgiften menar tydligen, att bilden alltid förlägges på avståndet för tydligt seende. Gör man ej detta naturvidriga antagande, är uppgiften olöslig. Detsamma gäller om ett optiskt problem, angående en gammal person, vilket gavs V.. T. 1925. Antager man, att personen i fråga är så lastgammal, att han förlorat all ackommodationsförmåga, kan uppgiften lösas.

Beträffande kikare betonas alltid med rätta att okularet verkar som en lupp, men när luppens användning framställes felaktigt, blir även framställningen av kikarna snedvriden. Vare sig man betraktar ett mycket avlägset eller ett närmare liggande föremål genom en kikare, bör denna

inställas så, att de i ögat inkommande strålarna bliva parallella. Erfarenheten visar dock, att de flesta normalseende personer, som äro ovana att använda kikare, förlägga slutbilden 1 à 2 m framför okularet. Genom övning kan man lära sig att se genom en kikare utan ackommodation. En erfaren fackman på det militära området talade för några veckor sedan om för mig, att en instruktion angående kikares användning inom armén skulle utarbetas. I denna instruktion skulle noga framhållas betydelsen av att varje man försökte se utan ackommodation. Med tanke härpå synes det vara mindre lämpligt att i skolan lära blivande officerare, att bilden i en kikare skall förläggas 20 à 30 cm framför okularet.

Av det sagda torde framgå, att synvidden eller avståndet för tydligt seende ej spelar någon roll i teorien för kikarna. En uppgift angående kikare bör ej hava följande missvisande formulering: »En person ser tydligt ett avlägset föremål genom en teaterkikare av 8 cm:s längd. Objektivets fokaldistans är 20 cm. Hur stor är okularets fokaldistans, då synvidden är 24?» Riktiga svaret på denna fråga är 12 cm och ej 8 cm, ty kikarens längd är lika med skillnaden mellan objektivets och okularets fokaldistanser, då kikaren är inställd för parallella strålar. Naturligtvis kan en person ackommodera så starkt, att bilden faller 24 cm från okularet, men detta är ej lämpligt.

Vad angår närsynta och långsynta personer, så kunna deras syndefekter kompenseras genom glasögon, som fästas vid kikarens okularmusslor. Vi böra ej upptaga den knappt tillmätta tiden i våra skolor med att låta eleverna räkna uppgifter av följande ej ovanliga typ: En närsynt person (synvidd = 10 cm) och en långsynt person (synvidd = 40 cm) använda samma tub. Hur mycket måste okularet (fokaldistans = 5 cm) förskjutas mellan båda inställningarna? För övrigt spelar synvidden för en närsynt eller långsynt person ingen roll vid inställningen av en kikare. Inställningen sker så, att slutbilden faller i ögats fjärrpunkt.

Har man vid undervisningen lärt eleverna, att bilderna

i lupper, mikroskop och kikare alltid falla på avståndet för tydligt seende, är det helt naturligt, att man begår samma misstag, då det gäller glasögon. För att visa att så är fallet, behöver jag endast citera följande bekanta räkneexempel: »Hurudana glasögon bör en närsynt person med 8 cm synvidd använda, för att tydligt se avlägsna föremål?» Räknar man på känt sätt, blir svaret — 12,5 dioptrier. Så starka glas finnas sannolikt ej i de optiska affärerna utan måste särskilt beställas. Som väl är, har det aldrig fallit någon människa in att beställa glasögon med ledning av dylika beräkningar. En person, som vore utrustad med sådana glasögon, måste dagen i ända anstränga sina ögon i hög grad. Det skulle säkert ej dröja länge, förrän hans ögon genom denna oriktiga behandling vore fullständigt förstörda.

Om man skall göra beräkningar på glasögon, måste man hava reda på att s. k. fjärrglasögon skola vara så beskaffade, att personen ser avlägsna föremål utan ackommodation. Bilden i glasögat skall alltså sammanfalla med ögats fjärrpunkt. Ligger denna t. ex. 20 cm framför ögat, bör glasögats fokaldistans vara 20 cm. Även om synvidden är 8 cm, skall alltså glasögat hava en styrka av — 5 dioptrier i stället för — 12,5 dioptrier.

Hurudana glasögon bör ovannämnda person använda för att läsa med boken på 25 cm:s avstånd? Enligt gängse beräkningsmetod erhålles: $\frac{1}{25} - \frac{1}{8} = -\frac{17}{200} = -8{,}5$ dioptrier. Räknar man däremot riktigt, erhålles $\frac{1}{25} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{100} =$ $= -1$ dioptri. Skillnaden är alltså avsevärd.

Av det sagda framgår, att man bör framhålla att långvarig ackommodation vid användning av optiska instrument verkar tröttande och att den kan vara skadlig. Glasögon är det enda säkra medel vi känna för att avlasta denna ansträngning från ögats fina muskler vid dagligt arbete. Som sammanfattning kan man säga, att alla optiska instrument skola användas så, att ögat anstränges så litet som möjligt.

En anordning för erhållande av stora vinkelhastigheter med rotor utan fast axel.[1]

Av C. H. JOHANSSON.

När det gäller att uppnå högsta möjliga vinkelhastigheter hos en rotor, betingas den övre gränsen i första hand av materialets begränsade hållfasthet, i det att centrifugalkrafterna ge upphov till betydande påkänningar. En annan svårighet ligger i omöjligheten av att få rotorns statiska och dynamiska utbalansering fullt exakt. I förra fallet sammanfaller icke det roterande systemets tyngdpunkt med

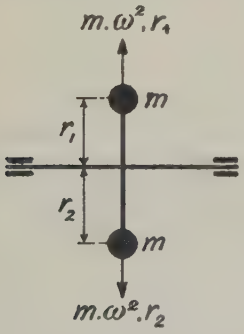


Fig. 1 a.

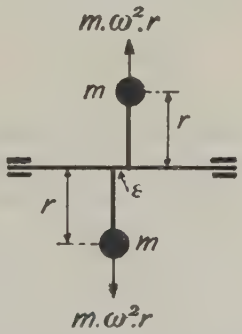


Fig. 1 b.

axelcentrum (fig. 1 a), varför vid rotation en centrifugalkraft $m \cdot \omega^2 \cdot (r_2 - r_1)$ uppstår, verkande vinkelrätt mot axeln. I senare fallet är massfördelningen sådan, att ett s. k. centrifugalmoment $m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \varepsilon$ uppstår (fig. 1 b), som i axel och lager ger extra påkänningar, vilka vid stora varvtal

[1] E. HENRIOT et E. HUGENARD, Journ. de physique et le radium (IV). 8. S. 433. 1927.

orsaka besvärande skakningar och vibrationer. I båda fallen blir följden axel- eller lagerbrott vid ett övre gränsvärde på varvtalet, för så vitt ej rotorn dessförinnan sprungit sönder.

En elegant lösning av utbalanseringsproblemet gav DE LAVAL genom sin anordning med fjädrande axel. Ehuru dess princip är välbekant, kan det vara av intresse att erinra om densamma. Rotorn antages vara en skiva med massan m, fäst på axeln A—A (fig. 2), varvid skivans tyngdpunkt faller ett litet stycke e utanför axelcentrum. Vid rotation åverkas massan m av en centrifugalkraft, som åstadkommer en utböjning y av axeln. Detta gäller även vid en normalt kraftig axel. Den totala, vinkelrätt mot

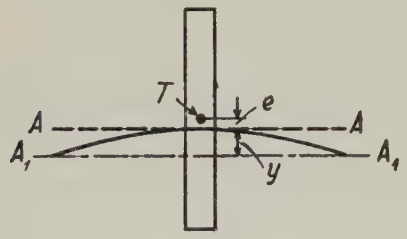


Fig. 2.

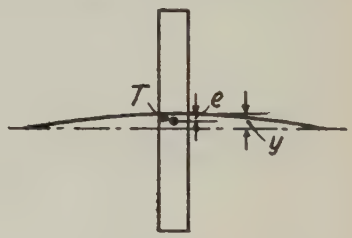


Fig. 3.

axeln verkande, centrifugalkraften blir $m \cdot (e+y) \cdot \omega^2$, där ω är vinkelhastigheten. Emot utböjningen verkar axelns stelhet med en kraft, som vid små y-värden är proportionell mot dessa. Jämvikten bestämmes sålunda av ekvationen

$$m \cdot (e+y) \cdot \omega^2 = \alpha \cdot y,$$

där α är en konstant, beroende av axelns dimensioner och elastiska egenskaper. Löses y, fås

$$y = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{\alpha - m \cdot \omega^2}.$$

För det fall att nämnaren går mot noll, vilket sker, då man uppnått det s. k. kritiska varvtalet (vinkelhastigheten ω_k), blir y mycket stort. Detta innebär, att påkänningarna på axeln bli så stora, att brott uppstår. Ur relationen

$$\alpha - m \cdot \omega_k^2 = 0 \text{ fås } \omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Av detta uttryck framgår, att ω_k är beroende endast av massans storlek och axelns hållfasthetsegenskaper. För $\omega = \omega_k$ blir därför y stort oberoende av storleken på e, om blott denna storhet har ändligt värde.

Lyckas man på ett eller annat sätt överskrida det kritiska varvtalet, antingen genom att anbringa stöd invid själva rotorn eller genom att snabbt öka upp vinkelhastigheten utöver den kritiska, så att axelbrott icke hinner uppstå, visar det sig, att rotorn får tendens att rotera kring sin fria axel. För detta fall kommer tyngdpunkten att ligga mellan rotations- och axelcentrum på sätt som framgår av fig. 3, i ett jämviktsläge, som FÖPPL visat vara stabilt. Man får därvid

$$m \cdot (y - e) \cdot \omega^2 = \alpha \cdot y$$

$$y = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot e}{m \cdot \omega^2 - \alpha} = \frac{e}{1 - \frac{\alpha}{m \cdot \omega^2}} = \frac{e}{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}},$$

vilket innebär, att y avtar vid ökning av ω, för att, när ω går mot ∞, ge $y = e$. Massan roterar då kring en axel genom tyngdpunkten.

Detta förhållande utnyttjade DE LAVAL genom att använda en fjädrande axel med litet värde på α resp. ω_k. Han fick på så sätt utan alltför noggrann avvägning en mycket jämn gång på sina hastigt roterande ångturbiner, varvid $\omega : \omega_k$ valdes omkring 7. Vid de minsta turbintyperna var löphjulets diameter 1 dm, axeln några få millimeter och varvtalet 30 000 per min. Med hänsyn till ångans utströmningshastighet skulle det mest ekonomiska varvtalet varit bortåt 100 000 per min., men hastigheten begränsades därigenom, att vid högre värden löphjulets ledskenor gingo sönder och slungades ut. En enkel räkning visar också, att de uppträdande centrifugalkrafterna bli betydande. Accelerationen är $\omega^2 \cdot r$ och den kraft p, som verkar på

1 grammassa i periferien på ett sådant löphjul med 30 000 varv/min., blir

$$p = m \cdot \omega^2 \cdot r = 1 \cdot \frac{500^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 5}{981 \cdot 1\,000},$$

d. v. s. ungefär 50 kgf per grammassa.

Helt nyligen har prof. E. Henriot vid universitetet i Bryssel tillsammans med E. Hugenard, direktörsassistent vid Tekn. högskolans flyglaboratorium därstädes, publicerat ett förberedande meddelande över en metod att uppnå mycket höga varvtal. Därvid är rotorn ett homogent metallstycke med betydligt större motståndskraft mot centrifugalkrafternas inverkan än de Lavals turbinhjul, med de tunna ledskenorna ute vid periferien. Anordningen är egendomlig, så till vida, att rotorn ej har fast axel utan hålles i stabilt läge med ett tunt strömmande gasskikt mellan stator och rotor. Förklaringen till detta stabila läge är enkel, om man tänker sig en strömmande vätska i stället för en gas. Vid en radiell strömning på sätt, som schematiskt angives å fig. 4, blir $v_1 > v_2$, och då enligt Bernoullis teorem

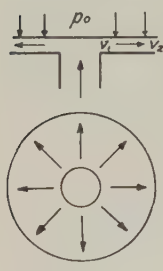


Fig. 4.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = \text{konstant},$$

fås $p_1 < p_2$. Här betecknar ϱ tätheten och p_1 och p_2 trycken i de punkter, där hastigheten är v_1 resp. v_2. Sker utströmningen mot atmosfärtrycket p_o, och är $p_2 = p_o$, blir tydligen $p_1 < p_o$. Detta betyder, att ett undertryck uppstår mellan skivorna, så att den övre plattan pressas mot den undre, så länge vätskan strömmar. Skivan kommer sålunda att befinna sig i jämviktsläge, svävande på det strömmande vätskeskiktet. Liknande gäller för en strömmande gas, ehuru beräkningen blir mera komplicerad.

På grundval av detta fenomen ha författarna konstruerat en stator med konisk fördjupning, i vilken inpassas en rotor i form av ett koniskt metallstycke med utfrästa

räfflor (fig. 5). I statorbehållaren inpressas tryckluft, som genom snett ställda hål strömmar ut i mellanrummet mellan statorn och rotorn. Luftströmmen får en spiralrörelse, som lyfter upp rotorn i det ovan beskrivna läget samtidigt, som denna kommer i rotation på grund av de radiella spåren. Statorns konvinkel är lämpligen 90°, under det att rotorns bör vara 100 à 120°. Luftrören i statorn utmynna

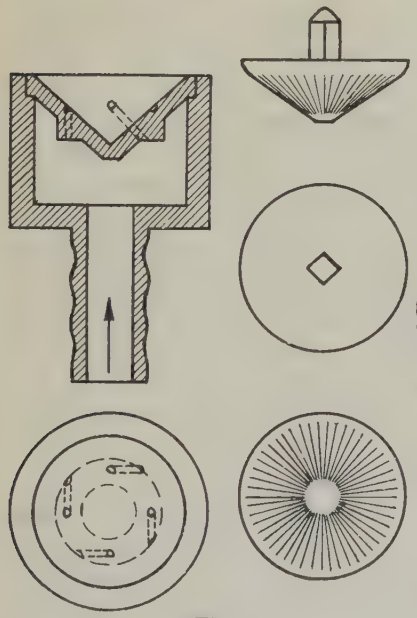


Fig. 5.

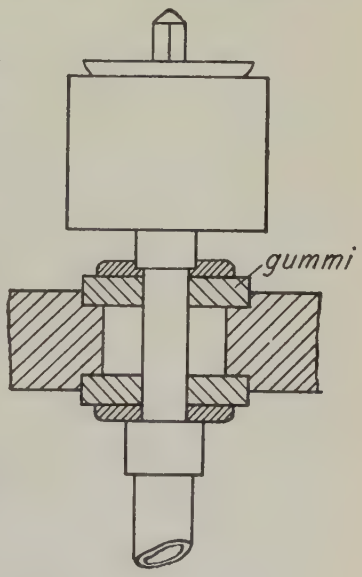


Fig. 6.

på ungefär halva konhöjden samt ligga i ett vertikalplan med 45 graders lutning mot horisontalplanet. Antalet luftrör kan vara 4, 6 eller 8. Som drivmedel användes komprimerad luft eller kolsyra med ett tryck, så att ovanför luftrören 1 à 6 kgf/cm^2 erhålles.

De på detta sätt uppnådda varvtalen äro utomordentligt höga. Sålunda har vid en rotordiameter av 11,7 mm uppnåtts en rotationshastighet av 660 000 varv per minut. Anordningen har utnyttjats för att erhålla en hastigt roterande

spegel, i och för uppmätning av ljushastigheten. För detta ändamål anbringas ett fyrkantigt stålstycke med spegelslipade ytor på konens översida. På grund av att tappen är fyrkantig verkar den centrifugerande på den omgivande luften, så att hastigheten blir mindre. Dock har ett så pass högt varvtal som 300 000 à 360 000 varv/min. erhållits och ljushastigheten har kunnat uppmätas på sträckor mindre än en meter.

Apparaten kan även drivas i upp- och nedvänd ställning, i det att undertrycket mellan statorn och rotorn är tillräckligt att fasthålla den senare trots egenvikten. Avstänges luftströmmen faller rotorn omedelbart ur sitt läge; men om man samtidigt låter ytterluften få fritt tillträde till statorhuset verkar rotorn självcentrifugerande på luften, så att rotorn fortsätter att gå och faller ner först då hastigheten sjunkit till ungefär en tiondel av sitt högsta värde. Detta förhållande kan utnyttjas för lagring av en rotor, som drives exempelvis elektriskt. Axeln har därvid ett koniskt stycke i vardera ändan, inpassat i var sin stator, och starten sker med tryckluft. När varvtalet blivit tillräckligt högt, frånkopplas tryckluften, och rotorn, som nu drives med elektrisk energi, förblir lagrad på luftskikt alstrade genom självcentrifugering.

Ett annat sätt att praktiskt utnyttja anordningen framgår av fig. 7. Konen har därvid upptill försetts med en ursvarvad hålighet, över vilken ingängats ett lock. Fylles håligheten med en vätska, uppnås en ytterst kraftig centrifugverkan, ehuru varvtalet vid de rotorer med större tyngd och diameter, som här ifrågakomma, blir avsevärt mindre. Sålunda har man med en rotor på 600 à 800 gram och en diameter på 72 mm uppnått 75 000 à 100 000 varv/min., motsvarande en gravitation av omkring 200 kgf per grammassa. Vid ovannämnda mindre rotor med 660 000 varv per min. blir den maximala centrifugalkraften omkring 3 000 kgf per grammassa. Författarna påpeka i detta sam-

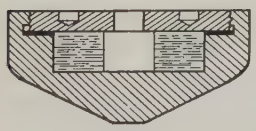


Fig. 7.

manhang, att den stora gradienten på gravitationsfältet kanske är mera anmärkningsvärd än det stora maximalvärdet, i det att centrifugalkraften varierar från 0 till detta höga värde på en sträcka av c:a 6 mm och omnämna i förbigående, att förhållandet möjligen kan utnyttjas till att experimentellt verifiera EINSTEINS relativitetsteori.

På grund av frånvaron av fast axel roterar rotorn kring sin fria axel, och det visar sig, att den kan vara tämligen dåligt avvägd. Sålunda ha försök gjorts med en 100-grams vikt, anbringad på ovannämnda 800 grams rotor på ett avstånd av 20 mm från centrum, och man har kunnat bringa upp densamma till 60 000 varv/min., om blott statorn fått elastisk uppställning på sätt, som framgår av fig. 6. Luftskiktet mellan stator och rotor uppgår endast till c:a 0,1 mm, och då i detta fall den fria axeln ligger betydligt vid sidan om konaxeln, skulle rotorn nödvändigtvis skrapa i statorn, om den senare vore fast uppställd. Icke desto mindre är det även vid rörlig stator synnerligen anmärkningsvärt, att så ej sker, ty statorns relativt stora massa måste för att tillräckligt snabbt kunna följa rotorns rörelser påverkas av betydande accelerations- och retardationskrafter, och det förefaller då vara mest naturligt, att det tunna luftskiktet pressas undan med åtföljande kontakt mellan rotor och stator. För att förklara, att så ej sker, anta författarna, att luftvirvlar uppstå i mellanrummet mellan stator och rotor. Relativa hastigheten mellan stator- och rotoryta är omkring 400 m/sek., och om virvlarna få tillnärmelsevis samma periferihastighet, blir denna rotationsfrekvens av storhetsordningen 1 000 000 varv/sek. Förefinnas sådana virvlar, komma luftmolekylerna på grund av centrifugalverkan att slungas ut till periferien och bilda ett skikt med högt tryck och stor täthet. En beräkning visar, att dylika virvlars motstånd mot kompression är större än ståls, vilket då skulle förklara gasskiktets stora motståndskraft.

För uppmätning av rotationshastigheten har använts tre olika metoder:

1. *Stroboskopisk* metod med neonlampa med 1 000 à 1 800 ljusmax/sek.

2. *Akustisk* metod, som grundar sig på att rotorn ger upphov till en hög ton. Genom användning av en magnetiserad rotor, induktionsspole och telefon har man kunnat visa, att den akustiska hörbara tonens frekvens är lika med rotationsfrekvensen. För uppmätning av densamma har använts en Galtons siren.

3. *Mekanisk* metod, varvid användes en ballistisk vridvåg med vilken den kinetiska rotationsenergien bestämmes. Apparaten anbringas i upp- och nedvänd ställning. Genom att avstänga gastillförseln får man rotorn att falla ned på vridvågen, ur vars utslag man sedan kan beräkna rotorns varvantal.

För den, som önskar demonstrera här beskrivna fenomen, bör det påpekas, att en turbinanordning enligt fig. 5 är mycket lätt att göra. Någon större precision vid tillverkningen fordras ej. Vid användningen bör man emellertid iakttaga en viss försiktighet, t. ex. anbringa ett skydd av trådnät. På grund av sin stora hastighet har den lilla rotorn så stor kinetisk energi, att den kan åstadkomma skadegörelse, om den av någon anledning skulle hoppa ur.

Ett försök över elektrolytisk polarisation.

Av GÖSTA AHLSTRÖM.

För undersökning av polarisationen vid elektrolys rekommendera våra läroboksförfattare åtskilliga olika anordningar.

Enklast torde väl vara att konstatera polarisationsströmmens riktning med en vertikalgalvanometer, vars utslag för viss strömriktning en gång för alla är bestämd. Instrumentet får då emellertid icke vara inkopplat i strömkretsen under polarisationen för att sedan medelst vippa bilda strömkrets med polarisationsbadet. Ett utslag av galvanometerns nål åt motsatt håll i senare fallet är nämligen intet kriterium på en elektrisk ström åt motsatt håll, om man tager i betraktande, att polarisationsströmmen är av kort varaktighet. Det ligger nämligen i sakens natur, att även i det fall att galvanometern göres strömlös, nålen på grund av sin tröghet går över nolläget, d. v. s. synes registrera en ström åt motsatt håll.

Man kan då sammanställa försöket så, som Ohlon i sin lärobok angiver. Han inkopplar i strömkretsen två strömbrytare, och för att bättre tillgodose den kvantitativa sidan av försöket har han utbytt galvanometern mot en vridspoleampèremeter, som emellertid måste kunna göra utslag åt båda hållen.

Med tanke just på den kvantitativa sidan av försöket, men också på att måhända många läroverk sakna nämnda vridspoleampèremeter, men äro i besittning av en vanlig voltmeter (se fig. 1), har författaren anordnat försöket sålunda.

Om strömkällan behöver här icke givas anvisningar. Som polarisationsbad ligger det närmast till hands att använda den vanliga vattenvoltametern. Det väsentligen nya

Fig. 1.

Fig. 2.

utgöres av en omkopplare med tre kontaktfästen och två rörliga armar. Dess utseende torde framgå av fig. 1, som är ett foto av det uppställda försöket. (Omkopplaren reproduceras separat i fig. 2.)

Kopplingsschemat är återgivet i fig. 3. Med läget 1—2 på omkopplaren kan spänningen hos batteriet avläsas. Det är utan vidare tydligt, att batteriströmmen passerar *G* vertikalt uppåt.

Ställes omkopplarens ena arm över till kontaktfästet 3, kopplas voltmetern ur, och batteriströmmen går nu genom polarisationsbadet. Det är tillräckligt att låta detta påverkas blott någon sekund.

Ställes slutligen omkopplaren i läget 2—3, gör voltmetern

genast ett utslag. Det torde vara självklart, att den elektriska ström, som förorsakar detta utslag, måste hava en i förhållande till batteriströmmen motsatt riktning — från *C* genom 3 och 2 till *G*.

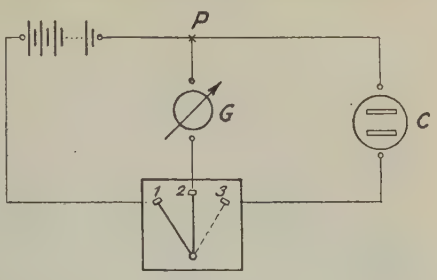


Fig. 3.

Av intresse är att följa det hastiga avtagandet av polarisationsströmmens styrka. Man får vara ganska snabb i vändningarna för att fixera nålens vändläge på voltmetern. Nedanstående tabell angiver i andra kolumnen polarisationsströmmens största spänning och i tredje kolumnen tiden i sekunder för potentialfall till 0,5 volt. Därefter sjunker potentialen rätt sakta. Ännu efter 10 min. registrerar voltmetern 0,2 volt.

N:r	Volt	Sek.
1	1,85	7,0
2	1,80	6,5
3	1,77	6,5
4	1,80	6,4

Två kemiska försök.

Av G. STARCK.

1. *Kvantitativ syntes av vatten.* I en uppsats av K. MELANDER i denna tidskrift (årg. 9, sid. 147; 1926) beskrives en apparat för kvantitativ syntes av vatten, som torde vara den bästa för demonstrationsändamål hittills konstruerade. Det nya i Melanders apparat är, att röret, vari kopparoxiden upphettas, är sammansmält med klorkalciumröret och väges tillsammans med detta. Härvid bortfaller den hittills brukliga kautschukförbindelsen mellan dessa delar av apparaturen, vilket medför så gott som fullständig garanti mot vattenförlust och avsevärt förkortar tiden för experimentet. Emellertid är Melanders apparat något skrymmande vid vägning på analysvåg. Jag har därför funnit det förmånligt att giva den en mera samlad form, såsom figur 1 visar.

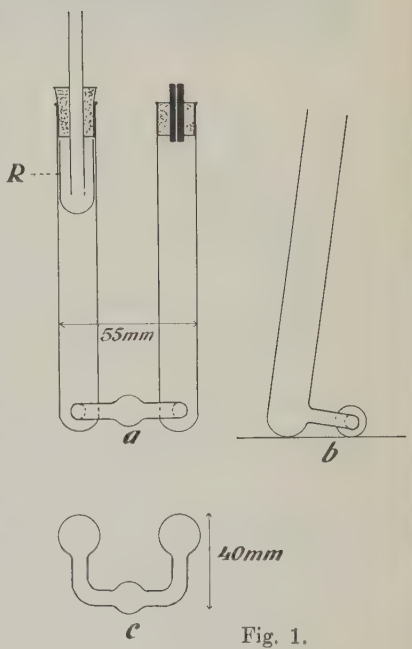


Fig. 1.

Apparaten består av två glasrör, 130 × 15 mm, i ena änden förenade med ett krökt rör, inre diameter 5—6 mm. Sammanbindningsröret är på mitten uppblåst till en liten kula (12 mm), som har två uppgifter; dels att upptaga huvudmängden av det bildade vattnet, dels att utgöra en av apparatens tre fötter. Stående

på horisontellt underlag, bör apparaten luta något bakåt (*b*), emedan jämvikten då blir stabilare. Den väges stående på vågskålen.

Det ena av rören (det högra i fig. 1 *a*) fylles med klorkalcium; det är tillslutet antingen med en kran av den typ, som användes på s. k. klorkalciumrör, eller som på fig. 1 *a* med en kork, genomsatt av ett kapillärrör och överdragen med lack. Kran är givetvis det bästa, men i allmänhet torde ett fint kapillärrör göra samma tjänst. I det andra röret, i horisontellt läge, placeras längst in skeppet med kopparoxid, därpå ett kort, ensidigt slutet glasrör *R*, som nätt och jämnt går in i det yttre. Detta rör förhindrar, att vattenånga går baklänges. Till sist kautschukpropp med inledningsrör för vätgasen.

Försöket tillgår nu på följande sätt. Skeppet väges med torr kopparoxid. Apparaten väges *med* röret *R*, men *utan* kautschukpropp. *R* och kapillärröret i den andra änden göra apparaten praktiskt taget tillsluten och oberoende av luftfuktighet. Den fastspännes nu i ett stativ, horisontellt med sammanbindningsröret nedåt enligt *c*. *R* uttages, skeppet införes, *R* införes, kautschukproppen isättes, och torr och ren vätgas inledes. Mellan de båda rören placeras vertikalt en värmeisolerande asbestskiva, under skeppet bäst en liten lågramp, som man själv lätt gör av ett mässingsrör. Upphettningen bör vara lindrig, lågorna, några mm höga, få ej vidröra glaset, detta ej färga lågorna. Upphettar man på detta sätt, är asbestskivan i själva verket överflödig. Sedan reduktionen är avslutad måste apparaten, innan den väges, fyllas med torr luft, som skall strömma i samma riktning som förut vätgasen.

Materialet kan vara vanligt glas, jenaglas eller svårsmält glas. Upphettningen är så lindrig, att det förstnämnda räcker; därav finnas även kranar på lager. Svårsmält glas är egentligen överflödigt, men det spricker mindre lätt än vanligt glas; kranar därav finnas ej. Jenaglaset är lättare att bearbeta och lika okänsligt, kranar av här önskad typ finnas

ej, men tillverkas lätt på beställning. Detta material torde vara det bästa.

Apparaten tillverkas av Rudolph Grave, Stockholm.

2. *Automatisk pipett och byrett med två avloppsrör.* Vid genomgången av den teoretiska kemien i ring IV brukar förf. utföra en förtvålning av etylacetat på vanligt sätt genom sammanblandning av etylacetat och natriumhydroxid, uttagande av prov och deras titerbestämning med saltsyra vid bestämda tidpunkter. Detta försök tar tid och bör helst lyckas första gången. Stötestenar äro för det första provens uttagande med vanlig pipett, som måste ske fort och *kan* misslyckas, så att de avsedda tiderna ej kunna hållas; för det andra titreringen, som måste vara snabb, även den, men säker, och där övertitrering hotar. Genom användning av en automatisk pipett och en byrett med två utlopp av mycket olika vidd kan man avlägsna dessa båda irritationsmoment och därmed risken för ett misslyckande.

Fig. 2.

Pipettens utseende framgår av fig. 2. Den består av en behållare av cirka 150 cm^3 volym och en därvid fastsatt pipett av cirka 10 cm^3 volym. För här ifrågavarande försök är det givetvis överflödigt, att pipetten har precis 10 cm^3 eller ens, att man känner dess volym; viktigt är blott, att den lämnar en konstant vätskevolym. Detta uppnås genom att röret mellan kranen *a* och pipetten är kapillärt och genom att pipetten upptill är utdragen till ett fint, omböjt kapillär. Man arbetar på följande sätt.

1) Behållaren fylles med reaktionsblandningen, kranarna stängda.

2) Kranen *b* öppnas.

3) Kranen *a* öppnas. Vätskan strömmar över i pipetten och fyller avloppsröret nedanför *b*. Så snart detta är fyllt stänges *b*. Vätskeförlusten är mycket obetydlig. Vätskan får fylla pipetten, tills en droppe tränger ut genom den

övre spetsen, då stänges *a*; droppen avtages med fingret eller med ett papper.

4) Kranen *b* öppnas, pipetten tömmes, kapillärröret mellan *a* och pipetten förblir fyllt med en konstant vätskevolym.

Pipettens fyllande och tömmande tar en tid, som för samma vätska och temperatur är konstant med ett par sekunders marginal (för förf:s exemplar, vatten och rumstemperatur $\sim$ 35 sek., därav 30 sek. för dess tömmande), en värdefull egenskap vid detta försök. En olägenhet är tills vidare, att den endast kan användas vid rumstemperatur.

Vid pipettens utvägning med vatten av obestämd, men konstant temperatur har jag erhållit följande väden:

1	10,6973 g
2	,7045
3	,7054
4	,7022
5	,6994
Medeltal	$10{,}7018 \pm 0{,}0010$ g

Vid titreringen har jag använt en byrett med tvåvägskran enligt fig. 3. Dock är till skillnad från fig. 3 endast det ena avloppsröret kapillärt, det andra har den hos byretter vanliga vidden.[1] Kapillärröret utdrages i en fin spets och ger mycket litet vätska, något beroende av vätskehöjden i byretten. Förf:s exemplar ger på en minut 2 cm^3 vid fylld, 0,9 cm^3 vid nästan tömd byrett. Vid titreringen låter man först titerlösningen rusa genom det vida röret; då man närmar sig omslagspunkten, ställes kranen raskt helt om och ger nu så litet vätska, att någon övertitrering knappast kan ifrågakomma. Man kan arbeta med lugn och t. o. m. utan att som eljest sitta med handen vid kranen.

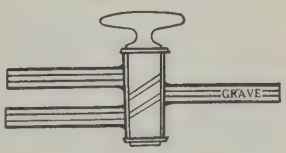


Fig. 3.

Vid användning av dessa båda apparater kan man utan brådska och utan att bli nervös uttaga och titrera prov med 2 minuters mellanrum.

[1] Kranen finnes på lager hos R. Grave.

Bokanmälningar.

IVAR J:SON MALMBORG, *Handledning vid experimentell fysikundervisning.* P. A. Norstedt & Söners förlag, Stockholm 1927, 104 sid., häft. kr. 2: 80.

Enligt förordet är boken utarbetad med tanke på de svårigheter som möta vid försöket att göra det bästa möjliga av fysikundervisningen i folkskolor, flickskolor och kommunala mellanskolor. Det må genast oförbehållsamt erkännas, att fysikundervisande lärare vid dessa skolor ha all anledning att vara författaren tacksamma för den i stort sett förträffliga handledningen, särskilt som en för det lägre stadiet avsedd sådan hittills saknats. För det högre finnes ju LEMOINES utmärkta handbok.

Att jag trots bokens förtjänster finner mig föranlåten att rikta några anmärkningar mot den, särskilt i den mån den är avsedd som handledning vid undervisningen i folkskolan, sammanhänger med min syn på denna undervisnings uppgift och metodik.[1]

En av fysikundervisningens huvuduppgifter är att införa eleverna i den naturvetenskapliga arbetsmetoden och vänja dem vid naturvetenskapligt tänkande. Men skall fysikundervisningen få denna uppfostrande och utvecklande betydelse, måste barnens självverksamhet i vidaste utsträckning tagas i anspråk. Det är av vikt, att just de grundläggande försöken på varje särskilt område anförtros åt lärjungarna. Laborationsövningar äro av nytta på alla stadier, men just på det lägsta, där det är mest angeläget att undervisningen blir så åskådlig som möjligt, äro de nödvändiga. Den första undervisningen bör därför vara heuristisk och baserad på lärjungeförsök.

På sid. 4 i lektor M:s handledning framhållas de goda resultat man vunnit på denna väg vid fysikundervisningen i realskolan och kommunala mellanskolan. Lektor M. anser emellertid laborationsundervisningen kräva så mycket, av läraren i utbildning och av skolan i utrustning, att det ej är möjligt att följa denna princip vid undervisningen i folkskolan. Han tänker sig undervisningen här ordnad som en demonstrationsundervisning med inlagda elevlaborationer, där så ske kan. Efter denna princip är handledningen utarbetad.

[1] »Arbetsprincipen i folkskolans fysikundervisning.» Tidskriften »Skola och samhälle», 1923.

Följande citat belyser lektor M:s ståndpunkt (sid. 20): »Ur pedagogisk synpunkt är det givetvis ett önskemål att kunna få fysikundervisningen så ordnad, att barnen själva få tillfälle att utföra ett och annat försök. Tyvärr är det förenat med ganska stora svårigheter att nå detta mål. Laborationerna kräva, om ej precis särskilda arbetsrum så dock en viss uppsättning materiell och instrument. Av läraren kräves dessutom händighet och företagsamhet samt förtrogenhet med ämnet. Valet av laborationsförsök är viktigt och svårt.»

Rec. kan med stöd av en mångårig erfarenhet försäkra, att lektor M. överskattar de svårigheter som möta i folkskolan. Det går mycket bra att basera undervisningen i folkskolans sjätte klass och även dess femte på lärjungeförsök, naturligtvis enkla sådana, utförda med enkla medel. Ett gott urval av försök finnes i Hj. Bergs lilla häfte *Lärjungeförsök i fysik*. En handledning i framställandet av enkla apparater är *Fysik och slöjd* av Nilsson och Gustafsson.

Huru många enkla lärjungeförsök kunna ej göras t. ex. på värmelärans område. De av lektor M. beskrivna utvidgningsförsöken (sid. 24 och 25) kunna eleverna med större behållning göra själva. Likaså försök sådana som temperatursänkning vid lösning av salmiak i vatten, köldblandning, destillering, smältpunktsbestämning (utan författarens avkylningskurva), ledning, strömning (i snedställt provrör).

Varför kunna eleverna ej själva få bestämma termometerns fixpunkter i stället för att låta dem »gruppvis komma fram till lärarbordet och konstatera, att kvicksilvret stannar vid 0° och 100° i resp. smältande snö och ångan från kokande vatten»?

Kostnaden för den för dessa försök behövliga materiellen borde ej vara oöverkomlig. Man reder sig med hemmagjorda trästativ (se *Fysik och slöjd*), ett halvt dussin termometrar (à kr. 1: 50), provrör, kork och glasrör. I alla händelser bli utgifterna försvinnande i jämförelse med det ackumulatorbatteri, den universalmagnet m. m., vilkas anskaffande författaren livligt tillråder.

Rec. vill inlägga en uttrycklig gensaga mot den undangömda ställning lektor M. vill ge elevlaborationerna i folkskolan. Nog kan idealet ställas högre än denne gör i de råd (sid. 5), som ges lärarna i skolor av formen B2. Icke alla sjätte klassens barn skulle få vara med om den laborativa undervisningen. Läraren skulle välja ut några särskilt begåvade, ordentliga och intresserade elever, vilka skulle få sitta för sig själva och laborera tyst efter någon bok!

Folkskolans lärare borde ej genom dylika vinkar avrådas från

att i enlighet med undervisningsplanens råd och anvisningar taga lärjungarnas självverksamhet i anspråk i den utsträckning det låter sig göra.

Så några ord om följande fråga: Böra elevlaborationerna vara av kvantitativ eller kvalitativ art? Lektor M. synes lägga huvudvikten vid de förra. Enligt min mening höra dessa mera hemma på det högre stadiet. På det lägre, där — såsom även lektor M. framhåller — huvudvikten ligger på att göra barnen förtrogna med de enskilda fallen och ej att lära dem allmänt formulerade lagar, böra kvalitativa försök i stor utsträckning komma till användning, såsom t. ex. i BERGS förut omnämnda häfte.

Ett exempel må anföras. Undersökningen av vattnets stighöjd i glasrör av olika vidd bör således i folkskolan göras kvalitativt och ej såsom lektor M. (sid. 23 och 41) fordrar kvantitativt med mätning av rördiametrar och ritning av diagram.

Lektor M. förordar i sin handledning ackumulatorer av Nifetyp. Givetvis är ett batteri av sådana med fördelningstavla en idealisk strömkälla. Folkskolor torde dock endast i sällsynta undantagsfall ha råd till en dylik anläggning. I allmänhet får man nog nöja sig med torrelement. Beträffande dessa har jag ej lika ogynnsamma erfarenheter som lektor M.; Hellesens stora dubbelelement bruka kunna hålla sig användbara i flera år.

Vid försöken över ljusets reflexion och brytning använder författaren på numera vanligt sätt en ljustavla, men ersätter ljusbanden med »skuggknippen», åstadkomna av stoppnålar. Besväret att skära ut några springor i en pappskiva är dock ej större än att läraren kan underkasta sig det för att bli i tillfälle att demonstrera fenomenen på ett mera tillfredsställande sätt.

De gjorda anmärkningarna avse icke att förringa bokens värde. Det är naturligt, att det första försöket att åstadkomma en handledning för det lägsta stadiet kan vara behäftat med en del brister. Det är en glädje att konstatera, att de i detta fall icke äro av allvarligare art. Med alla sina goda råd och praktiska anvisningar bör häftet kunna bli till avsevärt gagn för fysikundervisande lärare i de skolformer för vilka den är avsedd.

Hjalmar Nilsson.

J. K. ERIKSEN og JOHS. KOFOED, *Fysik for Gymnasiet.* J. H. Schultz Forlag, København. *Varmelære* (1926), 76 sid., kr. 2: 75. *Lyslære* (1927), 80 sid., kr. 2: 75. *Elektricitet I* (1928), 98 sid., kr. 3: 25. *Mekanik* (1928), 140 sid., kr. 4: 75.

»Hovedformaalet med denne Bog er at tilvejebringe en nøje Forbindelse mellem det fysiske Læsestof og Elevøvelserne. Vi

mener ikke, at Elevernes Viden kan opbygges paa Elev- eller Lærerforsøg, men Eksperimenterne giver en fysisk Indsigt og Forstaaelse, som ikke kan vindes paa nogen anden Maade. Vi mener, at den rent manuelle Færdighed, som Øvelserne giver, har stor Værdi, og at Elevernes stadige Omgang med fysiske Apparater og den stædse fornyede direkte Iagttagelse av Fænomenerne giver de gunstigste Betingelser for sand fysisk Forstaaelse.

Det vi har ønsket at opnaa med vor Lærebog i Varme, er at give en sammenhængende og systematisk Vejledning for Elevernes Arbejde, idet vi mener, at Bogen er skrevet saaledes, at Eleven paa egen Haand kan gøre det Arbejde, der forlanges av ham.»

Här citerade ord ur företalet till värmeläran anger de principer efter vilka läroboken är skriven.

När man undersöker, hur författarna förverkligat dessa sina principer, finner man, att de utkomna delarna närmast kunna karakteriseras som handledningar i elevlaborationer och demonstrationsförsök. Var och en av delarna innehåller ett 30-tal dylika försök, synnerligen omsorgsfullt beskrivna och illustrerade med teckningar utförda av den ena av författarna, lektor KOFOED. Dessa teckningar — särskilt i värmeläran och elektricitetsläran — förtjäna att uppmärksammas; anmälaren har ingenstädes sett bättre och mer upplysande illustrationer. De äro smakfullt utförda, innehålla allt väsentligt och visa fullt tydligt, hur försöket skall anordnas.

Lärostoffet meddelas — vederhäftigt ur såväl saklig som pedagogisk synpunkt — dels i samband med försöksbeskrivningarna, dels i särskilda, mindre textavdelningar.

Det måste erkännas, att det är vissa fördelar med en så uppställd lärobok. Försöksresultaten och det fysikaliska lärostoffet bli intimt knutna till varandra; eleven kan med bokens hjälp städse erinra sig, hur det försök utfördes som ledde fram till den eller den fysikaliska lagen, vilket givetvis är av stort värde. Tiden är för knapp och eleverna oftast alltför otränade för att själva kunna göra anteckningar, som härvid äro till fyllest. Eleverna böra även med ledning av läroboken kunna förbereda sig till laborationerna och redogörelserna inskränka sig till att omfatta endast det observerade siffermaterialet jämte vederbörliga uträkningar, vilket bör medföra att mera medhinnes under laborationstimmarna.

En nackdel med en så anordnad lärobok är emellertid, att den svårligen kan bli så överskådlig som en på sedvanligt sätt systematiskt ordnad, specifik lärobok. Denna olägenhet visar

sig särskilt vidlåda författarnas elektricitetslära. Kanske den dock ej hade behövt framträda så markant, om en god innehållsöversikt hade bifogats. Egendomligt nog är ingen av de utkomna delarna försedd med en dylik.

En annan nackdel — ur lärarens synpunkt — är att denne genom de detaljerade försöksbeskrivningarna gärna blir bunden till lärobokens lärogång. För att i möjligaste mån undvika att stelna i formerna torde det för de flesta lärare vara ett oavvisligt behov att variera framställningen i metodiskt avseende.

Det är således åtskilligt som kan anföras såväl för som emot den lärobokstyp som dessa danska läroböcker representera. Nog tror emellertid anmälaren för sin del, att de bästa resultaten erhållas — när det gäller överstadiet — med en kortfattad, översiktlig lärobok och en särskild laborationshandledning. På det lägre stadiet ställer sig saken annorlunda; här är typen i fråga förträfflig.

Om anmälaren således är tveksam om de föreliggande böckernas lämplighet som läroböcker, råder ingen tvekan om deras lämplighet — även för *svensk* publik — som laborationshandledning för såväl elever som lärare. Det finns mycket av värde att hämta ur dem såväl i metodiskt avseende som i fråga om försökens utförande. Många idéer ha författarna hämtat ur *Fysisk Tidsskrift* till vilken vederbörliga hänvisningar göras. Med intresse tager man också del av författarnas förslag till ämnen för uppsatsskrivning och elevföredrag. De mena, att åtskilligt av historisk och teknisk art, som ej medtagits i deras böcker, lämpligen behandlas på detta sätt. De tänka sig härvid samarbete med modersmålslärarna.

De meddelade kurserna omfatta i stort sett detsamma som motsvarande svenska läroböcker men äro mer än dessa inriktade på det rent fysikaliska; historiska och tekniska upplysningar förekomma sparsamt. I mekaniken (statik, dynamik och akustik), som är något mera omfattande, ingår även en kvantitativ behandling av elasticitetslagarna, harmonisk rörelse, tröghetsmoment och stötkrafter, vilket allt rätteligen hör till en god skolkurs i mekanik.

C. E. Blom.

T. Hagren, *Planimetri och stereometri.* Övningsexempel för realskolan och kommunala mellanskolan, Bonniers förlag, Stockholm 1927. Klotb. kr. 1: 25.

Denna exempelsamling innehåller 420 uppgifter, fördelade på tre avdelningar med rubrikerna planimetri, stereometri och specifik vikt. Varje avdelning föregås av en formelsamling Så t. ex. märkas Herons formel för triangelytan, formlerna för in-

och omskrivna cirklars radier, trianglars medianer och bissektriser samt på den stereometriska avdelningen formeln för den stympade konens volym. Anmälaren kan ej finna att någon av de nu uppräknade formlerna tillhöra realskolans stadium. Härledningarna ligga över elevernas kunskapsnivå. Härmed vill jag ej ha sagt, att man alldeles bör utesluta ett ex. som 154, där en triangels tre sidor äro uppgivna och ytan efterfrågas, men exemplet bör lösas utan formel. Detsamma gäller i viss mån exemplen på inskrivna cirkelns radie och stympade konen. Däremot torde uppgifter rörande omskrivna cirkeln, medianen och bissektrisen ovillkorligen böra förvisas till ett högre stadium.

Vad som ovan sagts förringar ej på något sätt värdet av det lilla arbetet, som säkerligen har en mission att fylla.

S. B—n.

Uppfinningarnas bok, del IV, Gruvväsen och metallurgi, P. A. Norstedt & Söners förlag, Stockholm 1928. 958 sid., 857 fig. Klotb. kr. 35: —, halvfr. kr. 40: —.

Verket innehåller en allmänt malmgeologisk, en gruvvetenskaplig och en metallurgisk del. Författarna äro prof. P. GEIJER (geologi), förste byråingenjör H. CARLBORG (mineralens och bergarternas betydelse, fyndigheternas upptäckande och undersökning m. m.), prof. B. G. MARKMAN (vissa av gruvbrytningens tekniska hjälpmedel), civilingenjör G. ÖDQVIST (järnets metallurgi), bergsingenjörerna E. S. BERGLUND och P. PALÉN (övriga metaller och legeringar), fil. lic. O. FORSMAN (hållfasthet och provning). Mindre avsnitt ha författats av överingenjör K. BILDT, bergsingenjör G. FOGELBERG och överingenjör G. BRING.

Vid så många författare har det ej kunnat undvikas, att en hel del upprepningar förekomma, särskilt i fråga om de historiska notiserna; i andra fall betingas de av ämnets logiska framställning. — I fråga om den gruvvetenskapliga delen synes den lekmannen vara vederhäftig och inom detta arbetes ram uttömmande. I fråga om den metallurgiska frapperas man av järnets dominerande ställning, 214 sidor, medan de övriga metallerna och legeringarna få nöja sig med 146. Om också boken är skriven med särskild hänsyn till svenska förhållanden och järnframställningen är en gammal svensk industri, så synes denna omständighet dock icke motivera en så betydande övervikt. Man får det intrycket, att det är förstahandssakkunskapen i fråga om järnframställningen, som kommit ämnet att svälla ut, medan metaller, som icke tillverkas i Sverige, beskärts ett mindre mått av intresse.

Metallografien behandlas i samband med provning och med

ganska lätt hand. Kanske med rätta, då tolkningen av ett tillståndsdiagram nog ej hör till de populära färdigheterna. Men det är då knappast på sin plats att upptaga till genomgång ett av de svåraste, nämligen järnets; för en läsare utan förkunskaper måste denna framställning erbjuda stora svårigheter. Tre eller fyra inledande sidor om tvåkomponentsystem kunna knappast utgöra en tillräcklig förberedelse.

Några få fysikaliska konstanter ha befunnits tarva rättelse. Illustrationerna bekräfta den ofta gjorda erfarenheten, att fotografiska bilder av fabriker, apparater eller tekniska anordningar i allmänhet äro mycket litet givande, så mycket mer som de förlora avsevärt i tydlighet vid reproduktion genom raster. Schematiserade konstruktionsritningar, som ju också här äro i stor majoritet, äro att föredraga.

För lärare i kemi och för elever i de högre klasserna utgör denna del på en gång en förträfflig och välkommen uppslagsbok och en lärorik och intresseväckande läsning.

KNUT PARCK, *Handledning vid kemiska laborationsövningar för realgymnasiet.* C. W. K. Gleerup, Lund 1928, 58 sid., häft. kr. 1: 50.

I föreliggande handledning har sammanförts en del av de laborationsuppgifter, som förf. förelägger sina elever i kemi. De utgöras av 20 synteser, 7 viktsanalyser, 2 bestämningar av metallers ekvivalentvikt, 8 bestämningar av molekyl- och atomvikter, 4 titreringar, 7 försök till jonteorien.

Uppgifterna äro av mycket växlande svårighetsgrad; bland de syntetiska träffar man några ganska enkla, som på sina håll torde ingå i 5:e klassens kurs, t. ex. framställningen av kaliumsulfat och -nitrat. Vidare framställas flera dubbelsalter, som erhållas genom enkel blandning av komponenterna. Då samlingen är ett urval och ej avser att vara fullständig, kunde det räckt med beskrivningen av en alunart. 7 synteser av olika fosfat äro tydligen parallellförsök till genomgången av fosfor.

Ett gott grepp är införandet av kvantitativa viktsanalyser, vilka så som inga andra experiment äro ägnade att visa eleverna, vad kemi är och hur man arbetar kemiskt. I stort sett hava hittills viktsanalyserna i skolan endast förekommit i form av konstruerade räkneexempel, oförmögna att vinna elevernas förståelse, att ej tala om intresse. Det enda sättet att gjuta liv i räkneexemplen är att flytta över dem på det experimentella planet, en viktig och tacksam uppgift. Man frågar sig blott, hur dessa ganska tidskrävande försök medhinnas; jag nämner bestäm-

ningen av koppar eller ännu hellre av järn, aluminium och krom, som bilda slemmiga, långsamt filtrerande fällningar. Detsamma gäller kanske ännu mer bestämningen av fosforsyra som magnesiumpyrofosfat, omfattande, då alla detaljer frånses, så pass stora manipulationer som fosforsyrans neutralisation, fällning i värme, filtrering, glödgning till konstant vikt. För en skolyngling, för vilken det noggranna kvantitativa arbetet med alla de detaljer, som måste iakttagas, är något nytt och ovant, synes det svårt att medhinna denna uppgift på rimlig tid. Säkert sätter den stora fordringar på lärarens omtanke och noggranna planerande av arbetet, och därom är ju endast gott att säga.

Till denna grupp av försök höra också bestämningarna av de s. k. fundamentala atomvikterna, för kalium, klor och silver, enligt Stas. För nybörjaren erbjuder Stas' bestämning, så länge han endast får läsa därom, stora svårigheter, som icke alltid övervinnas. Får han nu eftergöra dessa grundläggande försök, låt vara utan Stas' fordringar på noggrannhet, så torde förståelsen lätt infinna sig.

Bland försöken till jonteorien är en god nyhet att annotera, undersökningen av vätejonkoncentration med indikatorer. Denna metodik spelar vetenskapligt och praktiskt en så viktig roll, att ett första införande däri redan på skolstadiet synes väl motiverat.

Förf. upptager bestämningen av flyktiga ämnens molekylvikt enligt V. Meyer. Med avseende på formeln för beräkningen är att anmärka, att vattenångans tryck endast bör ingå med halva maximivärdet, om apparaten från början är fylld med vanlig luft med en ungefärlig relativ fuktighet av 50 %. Illustrationen till försökets beskrivning (fig. 8) kunde gott vara hämtad ur Victor Meyers första avhandling från 1878 om denna metod. Nu har ref. redan för 7 år sedan angivit en ny form av Meyers apparat, som även vid den mest objektiva prövning måste sägas vara en väsentlig förbättring därav (längden är reducerad till $^1/_3$, mantelröret av mässing, fallanordningen förbättrad). Först denna form har gjort V. Meyers apparat möjlig att använda i skolan, ja till en ytterst lämplig laborationsapparat. Det gör ett egendomligt intryck att finna ett arbete, som innebär ett avgjort framsteg (tryckt i vår enda pedagogiskt-naturvetenskapliga tidskrift, sedan i en svensk lärobok) så totalt ignorerat av en kollega. Jag vill med anledning därav tillönska förf., att hans i många avseenden förtjänstfulla handledning i kemiska försök måtte få en större spridning än den, som kommit min ifrågavarande uppsats till del.

G. Starck.

Gradualavhandlingar.

I tidskriften komma hädanefter att regelbundet meddelas korta referat av gradualavhandlingar inom tidskriftens ämnesgrupp, ventilerade vid våra universitet och högskolor. När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande författares egen hand. En dylik översikt bör vara av värde för den som vill följa med utvecklingen inom sina ämnen, och den bör även kunna befordra kontakten med arbetet vid våra universitet och högskolor, som i viss mån återspeglas i dessa avhandlingar.

HELMER BÄCKSTRÖM, *Decimalskattningen vid avläsning av symmetriska skalor* (With a Summary in English), Stockholm 1928, 158 sid. Disp. vid Stockholms Högskola 22 maj 1928. Opponenter: Statsgeodeten fil. d:r IVAR JUNG och fil. lic. OTTO FORSMAN.

Vid decimalskattning i samband med skalavläsningar göras subjektiva fel, beroende därpå att varje individ indelar skaldelen på sitt personliga sätt. Författaren visar, att man kan beräkna det genomsnittliga skattningsfelet vid en observationsserie genom att iakttaga det procentuella antalet skattningar, som kommer på varje decimal. De så erhållna felvärdena äro synnerligen säkra. Det sätt, på vilket en viss observatör indelar skaldelen, håller sig konstant under årtionden. Den subjektiva indelningen växlar emellertid med skalans strecktjocklek, intervallens längd, skalans placering (horisontell eller vertikal etc.), och förf. anger de lagar, som härvid framträda. Vidare diskuteras övningens inflytande m. m.

RAGNAR STRÖMBERG, *Adsorptionsmessungen mit einer verbesserten Mikrowage,* Vetenskapsakad. handlingar. Tredje ser., band 6, n:r 2, Stockholm 1928, 122 sid. Disp. vid Stockholms Högskola 18 maj 1928. Opponenter: Docent ANDERS ÅNGSTRÖM och lektor ERNST HERLIN.

Efter införandet av diverse konstruktionsförändringar å H. PETTERSSONs mikrovåg har författaren utfört mätningar av vattenångans adsorption på ytor av glas, smält kvarts, platina och guld. Som resultat har erhållits, att det i fuktig luft uppträdande »vätskeskiktet» redan vid ringa relativ fuktighet har en tjocklek av flera molekyldiametrar. Skikttjockleken växer med relativa fuktigheten, och adsorptionsisotermerna förete stora likheter inbördes. Ävenledes har förf. studerat inverkan av luft, som genom fosforpentoxid berövats sin fuktighet.

HANS L. J. BÄCKSTRÖM, *The chain reaction theory of negative catalysis*, 108 s. Disp. vid Stockholms Högskola 29 okt. 1927. Opponenter: Docent TORSTEN SVENSSON och d:r phil. CHRISTIANSEN, Köpenhamn.

Förf. prövar experimentellt en av CHRISTIANSEN uppställd teori för »kedjereaktioner», som i korthet uttalar, att de vid en reaktion först bildade molekylerna äro i besittning av stor kinetisk energi och därigenom verka som aktivatorer på andra molekyler, som ännu ej reagerat. Negativa katalysatorer bryta denna kedja genom att absorbera aktivatorernas energi på ett eller annat sätt. Förf. undersöker mekanismen vid den fotokemiska oxidationen av bensaldehyd, enantaldehyd och natriumsulfit vid belysning med olika kvicksilverlinjer med och utan negativa katalysatorer och bestämmer antalet molekyler, som omsättas vid absorption av ett ljuskvantum. Även fosforns oxidation har studerats experimentellt från denna synpunkt. Alla dessa reaktioner äro exempel på kedjereaktioner. (*G. Starck.*)

EDVIN JÖNSSON, *Absorptionsmessungen im langwelligen Röntgengebiet und Gesetze der Absorption.* Uppsala Universitets årsskrift 1928, 102 sid. Disp. 10 mars 1928. Opponenter: Docent ALBERT BJÖRKESSON och civilingenjör ROBERT THORÆUS.

I avhandlingen redogöres för en fotografisk-fotometrisk metod för bestämning av monokromatiska röntgenstrålars absorption i olika ämnen. Enligt denna metod hava absorptionskoefficienter inom det långvågiga röntgenområdet $0{,}7 < \lambda < 12$ Å. E. bestämts för Al, Ni, Cu, Ag och Pt. Inom nämnda våglängdsintervall ligga K-absorptionssprången för Al, Ni och Cu, L-absorptionssprången för Ag och M-absorptionssprången för Pt. Dessa absorptionssprång hava uppmätts. Lagar för absorptionssprångens storlek, för absorptionens beroende av absorbatorns ordningstal och den använda våglängden hava uppställts. Kurvor och tabeller äro medtagna, ur vilka man omedelbart erhåller värdena på absorptionskoefficienterna för vilken våglängd som helst $\lambda < 12$ Å. E. och för vilken absorbator som helst.

FOLKE K. G. ODQVIST, *Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten.* Stockholm 1928, 86 sid. Disp. vid Stockholms Högskola 19 maj 1928. Opponenter: Docent H. FAXÉN, Uppsala och fil. lic. H. PRAWITZ, Stockholm.

Alltsedan den RIEMANNska funktionsteoriens uppkomst i mitten av 1800-talet har ett stort antal arbeten ägnats åt den matematiska fysikens så kallade randvärdesuppgifter. Grundproblemet, det berömda DIRICHLETs problem, kan formuleras sålunda: *finn*

inom ett godtyckligt givet område i rymden en potentialfunktion (exempelvis elektrostatisk potential, lösning till LAPLACE' *differentialekvation), som på områdets begränsning antager föreskrivna värden.* Man kände redan tidigare lösningar till detta problem för speciella begränsningsytor, såsom sfären och ellipsoiden. Men den fullständiga lösningen för godtyckliga, kontinuerligt krökta begränsningsytor erhölls först genom en serie vackra arbeten under 1800-talets senare hälft. Sin slutgiltiga, allmännaste och tillika enklaste formulering fick problemets lösning genom IVAR FREDHOLMS epokgörande arbete av 1899. Han upptog en tidigare idé och ansatte den sökta potentialfunktionen i form av en potential av en tills vidare okänd dubbel beläggning över begränsningsytan, som det sedan gäller att bestämma. Det visar sig härvid lämpligt, att med grundproblemet adjungera ett annat, nämligen finnandet av en potentialfunktion, där normalderivatan (elektriska kraftens storlek) är given på begränsningsytan. Problemet att finna den okända dubbelbeläggningsfunktionen återfördes till en lineär integralekvation, och genom att giva en fullständig och uttömmande teori för dessa ekvationer hade FREDHOLM riktat den matematiska fysiken med ett nytt verksamt hjälpmedel, som sedan fått vidsträckt användning inom elasticitetsläran, hydrodynamiken för friktionsfria vätskor etc. och även inom den rena matematiken givit upphovet till en vidsträckt litteratur.

Det föreliggande arbetet ställer sig uppgiften att överföra den FREDHOLMska metoden på de så kallade NAVIER-STOKESska differentialekvationerna för rörelsen hos vätskor med inre friktion och hänsyn tagen till vätskans tröghet. Författaren betraktar företrädesvis stationära strömningar och uppdelar problemet så, att tröghetstermerna till en början försummas. Härvid vinner man den fördelen att de i differentialekvationerna uppträdande kvadratiska termerna i hastighetskomposanterna och deras derivator försvinna, och man får ett system av fyra lineära differentialekvationer, vilkas lösningar beskriva den så kallade »laminärströmningen». För det så reducerade problemet (STOKES' randvärdesproblem) har man hittills haft ett par speciella lösningar varibland den, varur den välkända STOKESska motståndsformeln för en sfärs translationsrörelse i en oändlig vätska framgått. Allmänt gäller det att bestämma en vätskeströmning i ett område så, att hastigheten är given på begränsningsytan. Tydligen måste därvid den inströmmande vätskemängden vara lika med den utströmmande (inkompressibilitetsvillkoret). Författaren lyckas nu uppställa funktioner med analoga egenskaper till potentialer av en dubbel ytbeläggning och härigenom finna en

lämplig utgångspunkt för härledning av FREDHOLMska integralekvationer. Det visar sig härvid ändamålsenligt att med det STOKESska randvärdesproblemet adjungera det problem, där de på vätskeströmningen verkande kraftkomposanterna äro givna över begränsningsytan. För de två problemen fås två adjungerade system av lineära integralekvationer. Diskussionen av de tillhörande homogena integralekvationerna låter sig genomföra analogt med motsvarande inom potentialteorien enligt PLEMELJ. Författaren konstruerar en GREENsk tensor och undersöker dess egenskaper. Därmed är en utgångspunkt funnen för behandling av det allmännare NAVIER-STOKESska randvärdesproblemet, där hänsyn tages till vätskans tröghet. Problemet återföres på ett system av kvadratiska integralekvationer, som lösas med successiva approximationer (NEUMANNsk serie). Resultatet blir, att det för tillräckligt små värden på »REYNOLDs tal» (eller mindre noggrant uttryckt: för låga hastigheter) existerar en lösning till de NAVIER-STOKESska differentialekvationerna, där hastigheten antager föreskrivna värden på begränsningsytan.

ERIK MARTENS, *A research on the spherical dynamical equilibrium-distribution of stars of unequal masses.* Göteborg 1928, Elanders boktryckeri aktiebolag, 51 sid. Disp. i Uppsala 31 mars 1928. Opponenter: Prof. H. VON ZEIPEL och fil. lic. Å. WALLENQUIST.

Den kinetiska gasteorien, som behandlar gasmassor under förutsättning att de äro uppbyggda av separata massor, vars avstånd från varandra äro många gånger större än deras egna dimensioner, kan i många avseenden också tillämpas på stjärnsystem. Vid studiet av gasmassor behöves en statistisk metod, enär molekylerna röra sig i banor, som på grund av sin litenhet undandraga sig observation. Vid studiet av stjärnsystem måste den statistiska mekaniken tillgripas, emedan stjärnorna genomlöpa så ofantligt stora banor, att observationerna ej räcka till för att bestämma dem. Den kinetiska gasteorien har med stor framgång av prof. VON ZEIPEL använts vid studiet av stjärnhopar. I jordens atmosfär tilltager tätheten utifrån in emot jordytan, och om jorden själv vore ett gasklot så skulle tätheten fortsätta att växa in emot centrum på grund av gasmassans egen attraktion. På samma sätt växer också tätheten av stjärnor — antalet stjärnor per volymenhet — emot centrum av en stjärnhop. Och liksom inom jordens atmosfär de tyngre gaserna överväga mera i mängd närmare jordytan än längre ut i atmosfären, så finnes också inom stjärnhoparna en starkare anhopning mot centrum av de tyngre stjärnorna. Prof. VON ZEIPEL

publicerade 1921 en metod att ur olika stjärngruppers olika anhopning mot centrum i en stjärnhop beräkna förhållandet mellan de olika stjärngruppernas medelmassor. Denna metod tillämpade prof. VON ZEIPEL på en samtidigt publicerad katalog över mer än 2 000 stjärnor i en stjärnhop i stjärnbilden Kusken. Stjärnorna indelades efter ljusstyrka och färg i fyra grupper, så att stjärnorna inom samma grupp kunde förmodas hava nära lika massor. Om stjärnhopen befinner sig i statistisk jämvikt, analog med den hos en isotermisk gasmassa, så måste mellan de olika stjärngruppernas täthetsfunktioner i en punkt inom stjärnhopen råda vissa relationer, vilka utom täthetsfunktionerna innehålla stjärngruppernas medelmassor. Prof. VON ZEIPEL bestämde med tillhjälp av dessa relationer förhållandet mellan medelmassorna hos de fyra stjärngrupperna inom den observerade stjärnhopen och fann värden, som väl överensstämde med dem man av andra skäl väntat finna. Emellertid utsäga dessa relationer intet om huru en stjärngrupps täthet inom stjärnhopen bör förändras med avståndet från stjärnhopens centrum för att stjärnfördelningen skall vara isotermisk. I föreliggande avhandling har förf. teoretiskt härlett varje stjärngrupps täthet som funktion av avståndet från centrum och funnit, att dessa teoretiska täthetsfördelningar väl överensstämma med de av prof. VON ZEIPEL observerade.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årg. XL, 1928, häft 5—8.

Ur innehållet i n:r 5. OTTO SELLING, Kemisk valens och röntgenspektra. — ERIK LARSSON, Framställning av tioglykolsyra och tiomjölksyra genom elektroreduktion. — N:r 6. HANS VON EULER, ESTER ERIKSSON und EDV. BRUNIUS, Über Reaktionen zwischen Zuckerarten und Aminen. — N:r 7. ERIK HÄGGLUND und F. W. KLINGSTEDT, Über die Veränderung der Cellulose unter Einwirkung von sauren Sulfiten. — N:r 8. HANS EGNER, Några nya hjälpmedel för kolorimetriska reaktionsmätningar. — CARL KJELLIN, Något om färgnomenklatur. — HANS VON EULER und HUGO JOHANSSON, Über die Rolle der Biokatalysatoren beim Kohlenhydratumsatz in Carcinomen. — I alla numren: Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Vetenskapen och livet. Årg. 13, 1928, häft. 5, 6, 7 o. 8. Hugo Geber. Kr. 1: 25 per häfte om 48 sid.

Ur innehållet i n:r 5: Golfströmmen. — Vad är en kemisk reaktion? — Hur man gör en elektrisk förstärkare för fonograf. N:r 6: Moderna broar. — Riktade radiovågor. — Organisation och rationalisering. — Skovelrotorn, ett nytt sätt att utnyttja vindenergien. N:r 7: Undervattenskablarnas livslängd. — De elektriska teoriernas utveckling. — Kapillariteten. — Erövringen av de högre temperaturerna. N:r 8: Elektrisk gasrening. — Den fysiska forskningens framsteg i Amerika under de senaste tio åren. — Tunna vätskehinnor och deras egenskaper. — Matematiken och dess nytta i det moderna livet. — Fotoelastisk materialundersökning.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1928, häft. 5 (maj), 6 (juni), 7 (juli) och 8 (aug.). Per år kr. 5: —, per häfte 50 öre.

Ur innehållet i n:r 5: Ett modernt impregneringsverk. »Ljushet», ett nytt begrepp inom belysningstekniken. — Publikationer. N:r 6: Mindre transformatorstationer. — Ljusdirigering. — En enkel tvåfasmätare med nolla. N:r 7. Statskraftverkens arbetsuppgifter. — Elektriciteten i köket. — Från sommarens utställningar i Jönköping och Örebro. N:r 8 är ägnat åt den i Stockholm pågående belysningsutställningen »Ljuset i människans tjänst» med orienterande artiklar, beskrivning av belysningstekniska nyheter, illustrationer. — Belysningstekniken genom tiderna, en axplockning ur Tekniska museets samlingar.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1928, 2 Hefte.

Ur innehållet i den elementära avd. A: V. GAMST, Regulære Polyedre. — L. P. MADSEN: Matematikken i den svenske Skole. — L. WILLESEN, Matematik for det sproglige Gymnasium. — Danske Eksamensopgaver. Ur inneh. i den vetenskapliga avd. B: D. FOG, Den isotrope Plans elementære Geometri. — Opgave i Mekanik i Skoleembedseksamen. — Løste Opgaver.

Fysisk Tidsskrift. Udgivet af Selskabet for Naturlærens Udbredelse. Aarg. 26, 1928, häft. 1 och 2—3.

Tidskriften redigeras av professorerna N. M. HANSEN och E. S. JOHANSEN, skolavd. av rektor L. CHRISTIANSEN, Aarhus. Kr. 12: — per år.

Ur innehållet i n:r 1: Uddeling af H. C. ORSTED Medaillen til Professorerne P. O. PEDERSEN, N. BJERRUM og J. N. BRØNSTED. — P. O. PEDERSEN, Hovedlinjerne af Radiobølgernes Ud-

bredelseforhold. — *Fysik i Skolen:* P. JØRGENSEN, Demonstrationsforsøg: Audionrøret som Afsender og Modtager af kontinuerte Bølger; Den syngende Buelampe; Resonans. — Ur n:r 2—3: E. B. ANDERSEN, Rutherford-Geigers »Spidstæller». — C. G. NIELSEN, De forskellige Energiformers Forvandling til mekanisk Arbejde. — I. SESTOFT, Om Aerologi og Aeronautisk Metereologi. — Danske Eksamensopgaver.

Kataloger m. m.

Kritpassare. Eleverna vid *Stockholms högre folkskola för teknisk utbildning* utföra en kritpassare av en ny, mycket ändamålsenlig form. Passarbenen äro tillverkade av 2 mm järnplåt, bockad i U-form, varför hållbarheten är synnerligen stor. Vikt c:a 400 g; benens längd 40 cm, största radie c:a 60 cm. Pris per st. kr. 8: —, 10 st. kr. 75: —. Försäljningssumman tillfaller oavkortad lärjungarnas premiefond. Beställningar och förfrågningar ställas till fil. lic. A. HJ. HEDELIUS, Valhallavägen 76, Stockholm Ö.

Magneter av koboltstål. Stål för tillverkning av permanentmagneter bör ha stor remanens och tillika stor koercitivkraft. Det allmännast använda magnetstålet är volframstål med 5 à 6 % W och 0,8 à 1 % C. Under världskriget, då brist på volfram rådde, ersatte man i Tyskland denna metall med krom (billigare), men man har på sistone återgått till volfram.

Ett epokgörande framsteg gjordes 1918 av japanerna HONDA och SAITO, vilka upptäckte, att en legering av 0,4 à 0,8 % C, 30 à 40 % Co, 5 à 9 % W och 1 à 3 % Cr efter lämplig termisk behandling erhöll en koercitivkraft, som — vid lika remanens — var 3 à 4 gånger så stor som volframstålets. Detta stål framställes numera på flera håll i utlandet (ej ännu i Sverige) dock med till synes rätt skiftande sammansättning. Särskilt i England har man ägnat stålet stor uppmärksamhet.

Koboltstålet möjliggör tillverkning av magneter med utomordentligt stor permanens jämte stort moment i förhållande till vikten. Emedan det är dyrt att framställa, svårt att bearbeta och att magnetisera, har det ej ännu kommit till större användning inom elektroindustrien, där man synes reda sig med volframstål. Vid instrumenttillverkning synes det emellertid komma att få stor betydelse. Såsom ex. må påpekas, att instrumentfirman PAUL W. LYTH (Klara S. Kyrkog. 5, Stockholm) med stor framgång använder dylikt stål till sina skeppskompasser.

Många vackra och mycket effektfulla magnetiska försök kunna göras med dessa starka magneter, varför de förtjäna att uppmärksammas av hrr fysiklärare. Firman W. B. NICOLSON, 166 a Bath St., Glasgow, för i lager en stor sortering, relativt billiga magneter av kobolt-kromstål (15 % Co), avsedda för undervisningsändamål. Även firman LYTH, som utproberat flera olika fabrikat, har lovat ställa sin erfarenhet till tjänst vid anskaffandet av lämpliga magneter.

Siemens Z-instrument (Elektriska A. B. SIEMENS-SCHUCKERT, Stockholm). Konstruerade såsom rese- och montageinstrument ha de små dimensioner (110 × 110 × 45 mm) och ringa vikt (0,6 à 0,8 kg) och synas hålla garanterat max. fel (± 1 %). Z-serien omfattar ampère-, volt- och wattmetrar för lik- och växelström enligt vridspole-, elektromagnetiskt och elektrodynamiskt system. T. ex. ampèremetrar (vridspole) med inbyggda shuntar (0,03; 0,3; 3 A eller 0,1; 1; 10 A à kr. 80: —), voltmetrar med inbyggda förkopplingsmotstånd (3; 15; 150 V eller 3; 30; 300 V à kr. 75: —). En synnerligen tilltalande och ytterst bekväm kombination kan erhållas med ett instrument med 4,5 ohms motstånd (10 mA; 45 mV) jämte särskild yttre shunt med vevomkopplare (0,03; 0,3; 1; 3; 10; 30 A) och särskilt yttre förkopplingsmotstånd likaledes med vevomkopplare (1; 3; 10; 30; 100; 300 V). Endast genom att vrida på veven kopplar man in från det ena mätområdet till det andra. Ett dylikt instrument medför ökad arbetshastighet och minskad risk för överbelastning, egenskaper hos ett instrument, som en fysiklärare vet att sätta värde på.

Kombinationen kostar visserligen c:a 230: — kr., som ju för en skola är rätt mycket; men man bör observera, att shunten samtidigt kan användas såsom galvanometershunt (genom att galv. shuntas eller förkopplas till 4,5 ohms motstånd). Och i förkopplingsmotståndet har man en serie noggranna motstånd om 100, 300, 1 000, 3 000, 10 000, 30 000 ohm (man får då inkoppla 4,5 ohm mellan de klämskruvar, som äro avsedda för anslutning till ampèremetern. Beaktar man denna mångsidiga användbarhet, är kombinationen i fråga ej dyr.

Weston Electric Instruments. (Ingenjörsfirman ZANDER & INGESTRÖM, Fredsg. 4, Stockholm). En rikhaltig *Export Catalog* (272 sid.) ger en översikt av firmans förnämliga fabrikation av elektriska mätinstrument. Våra undervisningsanstalter ha endast i ringa utsträckning kunnat anlita denna firma; priserna ha sedan gammalt varit för höga. En granskning av den utkomna katalogen visar, att flertalet apparater fortfarande äro alltför dyra för undervisningsändamål; dock finner man en del goda

instrument, vilkas pris reducerats så, att de numera kunna anses motsvara våra skolors resurser.

Detta gäller t. ex. en serie portabla volt-ampèremetrar (vridspole), modell 280, av ungefär samma dimensioner som Siemens ovan beskrivna Z-instrument, med tre spännings- och tre strömstyrkeområden (ett stort antal kombinationer t. ex. 150; 15; 3 V och 15; 3; 1,5 A). En särskild finess med denna typ är, att den tillåter hastigt på varandra följande mätningar av strömstyrka och spänning i en strömkrets och således gör samma nytta som två separata instrument. Genom att trycka ned en knapp kopplar man om från ampère- till voltmeter, varvid strömmen, som fortfarande går genom ampèreshunten, ej brytes.

Vidare må påpekas en känslig liten portabel galvanometer, modell 375 (0,4 kg; c:a 50 kr.). Instrumenttavlan monterad i 45° lutning; 22 mikroampère ger 1 mm utslag.

En intressant typ är firmans ampère- och voltmetrar av termoelementtyp, vilka tillåta mätningar av såväl lik- som växelström (upp till radiofrekvenser). De äro snabbare än värmetrådsinstrument och tåla större överbelastning än dessa och synas väl lämpa sig för skolförsök. Ampèremetrar av denna modell för max. 1 A (upp till max. 20 A) kosta 50 à 60 kr.

I några broschyrer — *Principles of Permanent Magnet Movable Coil and Movable Iron Types of Instruments*, 95 sid., och *Notes and Sales Letters*, 82 sid. — beskrivas de olika instrumenttyperna. Broschyrerna, vilka kunna erhållas från firman ZANDER & INGESTRÖM, äro av stort värde för fysiklärarен, som här finner intressanta upplysningar om det minutiösa arbete, som nedlagts på utarbetandet av varje detalj. Får man ej respekt för dessa små instrument liksom för deras konstruktörer och tillverkare, när man erfar, att det rörliga systemet i de små vridspolinstrumenten har en vikt, som understiger 0,2 g, ehuru det är sammansatt av 16 olika delar?

Philips. Firman tillverkar numera små neonfyllda, cylindriska glimlampor (diam. 17 mm; längd 55 mm), för växelström lägst 110 V och för likström lägst 150 V. Lamporna äro avsedda för permanent inkoppling i elektriska anläggningar i och för spänningskontroll (se prospekt: Philips Spannungsanzeigerlampe); kräva endast 0,5 watt och äro starka och synnerligen oömma för stötar. — Intressanta försök pågå för närvarande med tillverkning av ultravioletstrålande glimlampor (neon jämte kvicksilverånga) med kvartsglashölje. De äro avsedda för ozonisering av luften i boningsrum. En experimentlampa, som red. undersökt, visade god effekt; om priset ej blir för högt, kommer lampan att väl lämpa sig för fysikaliska skolförsök. — På rönt-

genteknikens område har utvecklingen nu kommit därhän att firman tillverkar en transportabel röntgenutrustning för direkt nätanslutning, med vars hjälp fullt effektiva röntgenundersökningar kunna göras överallt, där tillgång till belysningsström finnes. Apparaten kan bekvämt medföras i en kappsäck; en transformator ger den behövliga högspänningen, som är effektivt isolerad från alla yttre delar.

Electrical Instruments. GAMBRELL BROTHERS LTD, Merton road, London S. W. 18. Bland firmans tillverkningar må framhållas en för skolbruk mycket lämplig galvanometer (vridspole), vilken med tull och frakt torde kosta c:a 60 kr. Den är försedd med såväl visare som spegel, kan ställas på ett bord eller hängas på väggen; visaren ger 1 mm utslag för 1 mikroampère; motståndet 100 ohm. Red. har god erfarenhet av denna galvanometer. Firman tillverkar även galvanometershuntar till moderat pris (enl. AYRTON MATHER).

Optisk demonstrationsapparat En idé att taga vara på ligger till grund för en apparat, tillverkad av G. CUSSONS, Ltd, The Technical Works, Manchester, England. Det mest klargörande sättet att demonstrera de optiska reflexions- och brytningsfenomenen är ju att synliggöra strålknippena medelst rök. Svårigheten är emellertid, att i ett lektionsrum vidmakthålla rökmolnen utan obehag för de närvarande. Problemet har genom »CLARKES optical smoke-box» lösts på så sätt, att experimentanordningen med speglar, linser m. m. inbyggts i en låda med invändigt svarta väggar och med en sidovägg av glas. Tobaksrök blåses in i lådan och hålles sedan jämnt fördelad medelst en liten fläktanordning. Ljus från en båglampa skickas in genom ena gavelväggen och göres med linser på vanligt sätt parallellt, konvergent eller divergent, varefter de olika reflexions- och brytningsfenomenen studeras »i tre dimensioner».

Demonstrations-Messinstrumente, Physikalische Werkstätten, Göttingen (RUDOLPH GRAVE, Stockholm). Firman har utsänt meddelande om sina demonstrationsinstrument enligt vridspole-, mjukjärns- och värmetrådssystem. Samtliga ha en höjd av 35 cm och äro försedda med fram- och baksida av glas. En vridspolegalvanometer för 3 mA 150 mV (RM 70: —) kan förses med extra tillsats (RM 48: —), varigenom erhållas mätområdena 0,15; 1,5; 15 A och 3,15; 50; 300 V. Värmetrådsinstrumentet (RM 85: —) har mätområdena 1 och 5 A.

Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1927–28.

Höstterminen 1927.

Göteborg: Metodiska förel. i kemi (6 t.), lektor E. MÖLLER.

Lund: Om geometriundervisningen (2 t.), lektor B. SVENSSON. Valda delar av första ringens fysikkurs (2 t.), lektor G. FORSSTRÖM.

Stockholm: Till kemiundervisningens metodik (2 t.), lektor G. STARCK. Elektrisk urladdning i gaser (2 t.), adjunkt T. WETTERBLAD. Demonstration av den fysiska institutionen vid Stockholms högre folkskola för teknisk utbildning (2 t.), fil. mag. E. LÖWENHAMN.

Uppsala: Om matematikundervisningens metodik i realskolan (3 t.), adjunkt V. LENANDER. Om kemiundervisningen i realskolan (2 t.), adjunkt C. CEDERBLAD.

Vårterminen 1928.

Göteborg: Metodiska förel. i matematik (4 t.), lektor E. MÖLLER.

Lund: Metodiken för femte klassens kemikurs och Experimentella belägg för jonteorien (å gymnasiet), adjunkt K. PARCK.

Stockholm: Funktionsteoriens behandling på gymnasiet (2 t.), lektor A. WAHLGREN. Molekylar- och atomteori på gymnasiet (4 t.), lektor G. STARCK. Kapacitet och självinduktion i växelströmsläran (2 t.), adjunkt T. WETTERBLAD.

Uppsala: Om undervisningen i matematik å gymnasiet (4 t.), lektor G. BOLINDER. Ämnen för föreläsningarna: Matematikundervisningens allmänna metodik, Funktionsbegreppets införande i skolan, Allmänna riktlinjer för behandlingen av analytiska geometrien, Frågor, som beröra derivatbegreppets införande i skolan.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

297) Ett helt tal består av $6n$ siffror. I var och en av de på varandra följande grupperna av 6 siffror angiva de 3 första siffrorna samma tresiffriga tal som de 3 sista. Ett sådant tal är jämnt delbart med 7, 11 och 13. *C. A. Mebius.*

298) Om skillnaden mellan en triangels basvinklar är

$$|\beta - \gamma| = 90°,$$

så är

$$\cos \alpha = \frac{v_a^2}{bc}$$

där v_a är bisektris till vinkeln α. *Iter.*

299) Att konstruera en triangel, då man känner en vinkel, motstående sida samt rektangeln av de två övriga sidorna. *Cevas.*

300) Två cirklar med radien r ligga i samma plan och avståndet mellan deras medelpunkter är även r. En sfär med diametern r rör sig så, att den ständigt vilar mot båda cirklarna. Sök orten för sfärens medelpunkt. *X.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

301) Lös ekvationen

$$16(\cos 2x - \cos 6x) = \cot^2 x - \operatorname{tg}^2 x.$$

Svar: $x_1 = 45° + n \cdot 90°$; $x_2 = \pm 15° + n \cdot 90°$.

302) Basradierna till en parallellt stympad kon äro $1\frac{1}{4}$ cm och $6\frac{1}{4}$ cm. Höjden är $6\frac{2}{3}$ cm. Ett halvklot med centrum i den större basytans medelpunkt tangerar manteln. Sök den volym, som ligger mellan halvklotet och den mindre basytan.

Svar: 32,17 cm^3.

303) Ekvationen för sidan AB i en $\triangle ABC$ är $5x - 12y - 4 = 0$

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

och för sidan AC $x + 2y + 8 = 0$. Höjden från A är $6\frac{3}{5}$ enheter, höjden från C är $5\frac{1}{13}$ enheter. Sök ekvationen för sidan BC.

Svar: $y - 1 = \frac{4}{3}(x + 10)$
$y - 1 = \frac{24}{7}(x + 10)$
$y + 5 = \frac{4}{3}(x - 2)$
$y + 5 = \frac{24}{7}(x - 2)$.

304) Diskutera och upprita kurvan

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^3 + 2x^2}.$$

305) $ABCD$ är ett parallelltrapets, i vilket den ena av de parallella sidorna $AB = a$ och den andra $CD = 2a$. Genom D drages en linje, som skär AB i P och CB:s förlängning åt B till i Q. Beräkna längden av AP, om summan av trianglarna ADP och PBQ skall bli ett minimum. Svar: $AP = a(\sqrt{2} - 1)$.

306) Att i en given cirkel inskriva ett parallelltrapets, då man känner diagonalernas skärningspunkt och längden av de icke parallella sidorna.

Lösningar till uppg. 280, 287, 288, 289.

280) *A och B äro två punkter på en cirkel. Att draga de parallella kordorna AA_1 och BB_1 så, att trapetset ABB_1A_1 får uppgiven yta k^2.* X.

Kalla AB för a. Konstruera $h = \frac{k^2}{a}$. Upprita den med den givna koncentriska cirkel, som tangerar AB i mittpunkten M. Uppsök på denna cirkel de punkter M_1 och M_2, som ligga på avståndet h från AB. Då ha AA_1 och BB_1 riktningen MM_1 (resp. MM_2). Trapetsets höjd är $AB \cdot \sin \angle A$ och dess yta

$$Y = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot AB \sin \angle A = MM_1 \cdot \sin \angle A \cdot AB = ah = k^2.$$

Diskussion: Om $h = \frac{k^2}{a} < \sqrt{4r^2 - a^2}$, finnas två symmetriska lösningar.

Om $h = \frac{k^2}{a} = \sqrt{4r^2 - a^2}$, sammanfalla lösningarna i rektangeln med sidan AB. (r betyder här den ursprungliga cirkelns radie.)

Emellertid kan det inträffa, att AB och A_1B_1 råkas inom cirkeln, och då skall Y tolkas som skillnaden mellan ytorna av de båda trianglar, som dessa bilda med AA_1 och BB_1. Utesluter

man sådana trapets, måste, som lätt bevisas,

$$\frac{k^2}{a} \geqq \frac{a^2}{4r^2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Löst av *X*, som även insänt en andra lösning.

287) *n är ett positivt helt tal. I en konvergent geometrisk serie med reella termer är* $s_n = 1$; $s_{3n} = k$. *Beräkna* S_∞. *Möjlighetsvillkor?* *X.*

Förutsatt att serien är konvergent, har man, om dess kvot $= q$,

$$\left.\begin{aligned} k &= S_\infty (1 - q^{3n}) \\ 1 &= S_\infty (1 - q^n) \end{aligned}\right\}$$

varav $(q^n)^2 + q^n + 1 = k$

eller $(q^n + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = k$.

Sambandet mellan q^n och k representeras grafiskt av en parabel med vertex i $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$.

Fall 1. n ett jämnt tal. q^n måste ligga mellan 0 (inklusive) och 1 och följaktligen k mellan 1 (inklusive) och 3. Vi erhålla två serier $(q = \pm\sqrt[n]{q^n})$ med

$$s_\infty = \frac{1}{1 - q^n} = \frac{3 + \sqrt{4k - 3}}{2(3 - k)}.$$

För $k = 1$ sammanfalla serierna i den oegentliga

$$1 + 0 + 0 + \ldots$$

Fall 2. n ett udda tal. q^n måste ligga mellan -1 och $+1$. Då q^n växer från -1 till $-\frac{1}{2}$, avtar k från 1 till $\frac{3}{4}$; då q^n växer från $-\frac{1}{2}$ till 1, växer k från $\frac{3}{4}$ till 3. Vi erhålla alltså för $\frac{3}{4} < k < 1$ två serier med

$$s_\infty = \frac{3 \pm \sqrt{4k - 3}}{2(3 - k)},$$

vilka sammanfalla för $k = \frac{3}{4}$. För $k = 1$ få vi den oegentliga serien $1 + 0 + 0 + \ldots$ och för $1 < k < 3$ en serie med

$$s_\infty = \frac{3 + \sqrt{4k - 3}}{2(3 - k)}.$$ *X.*

288) *Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna från två fasta punkter till en parabel, vars topp glider utefter punkternas föreningslinje.* *Iter.*

Låt oss först betrakta parabeln $y^2 = 2px$ i ett rät- eller snedvinkligt koordinatsystem. Om de tangenter (y-axeln undantagen), som gå genom $A(0; y_1)$ och $B(0; y_2)$ ha vinkelkoefficienterna k_1 och k_2 resp., så är

$$y_1 = \frac{p}{2k_1}$$

$$y_2 = \frac{p}{2k_2}$$

varav
$$y_1 - y_2 = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denna likhet gäller även om parabeln tänkes parallellförflyttad i y-axelns riktning, exempelvis till läget $(y - y_0)^2 = 2px$.

Fastläggas nu A och B i resp. $(0; l)$ och $(0; -l)$, sedan parabeln förflyttas på angivet sätt, erhåller man orten för de båda ifrågavarande tangenternas skärningspunkt $P(x; y)$ genom att i (1) sätta

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= l \\ k_1 &= \frac{y-l}{x} \end{aligned}\right\} \quad \text{och} \quad \left.\begin{aligned} y_2 &= -l \\ k_2 &= \frac{y+l}{x} \end{aligned}\right\}.$$

Man finner
$$y^2 = \frac{p}{2} \cdot x + l^2,$$

d. v. s. en parabel gående genom A och B med samma axelriktning som den rörliga. Dess parameter är (även då glidningen försiggår längs en annan tangent än topptangenten) $\frac{1}{4}$ av den glidande parabelns.

Anm: Är satsen bevisad för AB som topptangent, följer det allmännare fallet även medelst en sned parallellprojektion.

X.

289) *I en likbent triangel delas basen i tre lika delar, och delningspunkterna sammanbindas med spetsen. Hur stor skall vinkeln vid spetsen vara, för att vinklarna mellan en av dessa linjer och närliggande ben skall bli så stor som möjligt?*

Vi sätta basen $AB = 3a$. Äro delningspunkterna E och F (i ordning från A räknat), erhålla vi läget av spetsen C genom att upprita en cirkel, som går genom A och E och tangerar AB:s mittpunktsnormal. Kalla vi höjden för x, erhålles enligt en känd sats

$$x^2 = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

varav
$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

och
$$tg \measuredangle ACM = \sqrt{3}$$

eller
$$\measuredangle ACM = 60°.$$

(M är AB:s mittpunkt.)

Att vinkeln ACE blir ett maximum bevisas utan svårighet.

Svar: Den sökta vinkeln är 120°. *Red.*

Fysikaliska uppgifter.

I detta häfte påbörjas en serie fysikaliska problem, författade av lektor RAGNAR LUNDBLAD. Flertalet äro givna vid skolskrivningar i tredje och fjärde realringarna för abiturientårgångarna 1927 och 1928 vid högre allm. läroverket i Luleå. Lektor L. har önskat att genom tidskriften få ställa sina problem till medlärares förfogande, vilket dessa säkerligen skola veta att uppskatta; ty var och en, som sysslat med författande av fysikaliska problem, vet vilken mödosam uppgift detta ofta är.

Samlingen avser således ej att utgöra ett inlägg i den diskussion angående de fysikaliska uppgifternas karaktär och svårighetsgrad, som vårens studentskrivning gav anledning till.

Början göres med tillämpningsuppgifter på Arkimedes' princip (1—4), vätskors tryck (5—8), gasers tryck (9—13), gasernas allm. tillståndslag (14—16) och kalorimetri (17—19).

1. På en lättrörlig vågbalans är på ena sidan en ihålig glaskula upphängd, på den andra en motvikt av mässing. I luft av 760 mm tryck och en viss temperatur hålla de varandra i jämvikt. Apparaten insättes i en glasbehållare, som är försedd dels med manometer och dels med rör, genom vilka gas kan ledas till och ifrån. Glasbehållaren evakueras först, varvid glaskulan sjunker; sedan inledes koldioxid, och man finner, att jämvikt återinträder, när så mycket koldioxid tillförts, att manometern visar trycket 497 mm. Temperaturen är fortfarande densamma som vid försökets början. Huru stor är spec. vikten för koldioxid vid 760 mm och den rådande temperaturen, om den för luft under samma förhållanden är 0,001293?

2. En ihålig glaskula är nedtill försedd med en insmält ögla av platinatråd och innehåller så mycket blyhagel, att den sammanlagda vikten är 51,344 g. I öglan hänges en fin guldkedja, som väger 38,6 mg per cm. Om kulan med vidhängande kedja nedsänkes i ett kärl med rent vatten, ställer den sig så, att kedjans översta punkt befinner sig 0,5 cm över bottnen. Om kärlet i stället är fyllt med en viss saltlösning, flyter kulan upp så mycket, att kedjan når 21,15 cm över bottnen. I båda fallen ligger kedjans nedersta del ringlad på kärlets botten; den övre delen kan anses vara fullt vertikal, och kulan befinner sig helt och hållet under vätskeytan. Beräkna saltlösningens spec. vikt, när guldets är 19,3.

3. Två lika vikter äro förbundna medelst ett snöre, vars vikt försummas. Snöret löper utan friktion över två små, på samma

höjd belägna trissor, vilkas avstånd är 30 cm. En sten fästes i snörets mittpunkt, vilken därvid sänker sig 45 cm. En bägare med vatten föres därefter underifrån upp mot stenen, tills denna är helt nedsänkt under vattenytan. Stenen lyftes därvid 34 cm. Beräkna dess spec. vikt.

4. Man vill medelst areometer bestämma specifika vikten för en vätska, som ej blandar sig med vatten, men förfogar ej över så stora mängder av densamma, att bestämningen kan ske på vanligt sätt. Man häller därför först vatten i en cylinder och nedsänker areometern däri och fyller sedan på av den vätska, som skall undersökas. Areometern ställer sig då så, att delstrecket 1,37 — d. v. s. det delstreck, som ligger i vätskeytan, när areometern får simma i en vätska av spec. vikten 1,37 — ligger i skiljeytan mellan vattnet och vätskan, och delstrecket 0,92 i vätskans övre, fria yta. Vilken är vätskans spec. vikt?

5. En bägare innehåller bensin, en annan vatten. En hävert, bestående av ett U-formigt böjt glasrör, fylles med bensin; man täcker vardera mynningen med ett finger, vänder röret och nedför den ena skänkeln i bensinbägaren, den andra i den högre belägna vattenbägaren, i båda fallen så, att mynningarna komma under resp. vätskeytor, varefter fingrarna borttagas. Sedan vätskorna kommit i jämvikt, befinnes avståndet mellan vätskeytorna i de båda kärlen vara 21,5 cm. Var i röret befinner sig då gränsytan mellan vattnet och bensinen? Intet vatten har runnit över i bensinkärlet; bensin, som ej blandar sig med vatten, har spec. vikten 0,70.

6. På ett bord står ett öppet kärl med plan, cirkelrund och vågrät botten, vilken invändigt är 34 cm i diameter. I kärlet inlägges ett isblock, som väger 13,8 kg, varefter man påskruvar ett lock, försett med ett uppåt vänt, vertikalt cylindriskt rör, vars inre diameter är 20 cm. Vatten påfylles till sådan mängd, att det utfyller hela kärlet och når upp ett stycke i röret. Isblocket, som icke kan stiga upp i röret, kommer därvid helt och hållet under vattenytan. Det hela får stå, tills isblocket smält. Den fria vattenytan befinner sig även då i röret. Hur mycket har trycket på bottnen ändrat sig till följd av isens smältning? Isens spec. vikt är 0,92.

7. Under ena vågskålen av en balansvåg upphänges med vertikal axel ett stycke aluminiumrör, öppet i båda ändar. Jämvikt råder, när den andra vågskålen är belastad med 152 g. Ett kärl med vatten ställes under vågskålen så, att röret neddoppar i vattnet. I röret hälles sedan olja, och samtidigt minskar man belastningen på andra vågskålen, så att jämvikten bibehålles. När slutligen gränsytan mellan olja och vatten ligger i jämnhöjd

med rörets nedre ända, utan att likväl ännu någon olja trängt ut utanför röret, är belastningen på den andra vågskålen vid jämvikt 114 g. Huru stor del av röret är då fylld med olja? Oljans spec. vikt är 0,9 och aluminiums 2,67.

8. Ett cylindriskt kärl har dubbla bottnar, av vilka den undre är försedd med ett munstycke, som kan sättas i förbindelse med en luftpump, och den övre har ett ganska stort cirkulärt hål. En massiv cylinder av järn med 5 cm bottenradie och 10 cm höjd placeras på den övre av bottnarna, så att den helt täcker hålet. Kring cylinderns nedersta del lägges en gummiring. Luftpumpen sättes i verksamhet, och slutligen är all luft bortskaffad mellan bottnarna och ända till gummiringen, vilken hindrar ny luft att inkomma under järncylindern. Runt kring järncylindern hälles sedan kvicksilver, som slutligen står 2 cm över dess övre yta. Huru stor kraft är erforderlig för att lyfta järncylindern? Barometerståndet är 760 mm, kvicksilvrets spec. vikt 13,6 och järnets 7,7.

9. Ett jämtjockt barometerrör utmynnar med den nedre, öppna änden i en skål med kvicksilver. Barometerståndet är 766 mm, men den inre kvicksilverytan står endast 754 mm högre än den yttre, vilket visar, att luft inkommit i barometerkammaren. Längden av barometerkammaren är 14 cm och dess inre diameter 8 mm. Huru mycket väger den däri befintliga luften? En liter luft vid 760 mms tryck och den temperatur, som var rådande vid experimentet, väger 1,2 g.

10. Ett cylindriskt kärl, vars inre diameter är 16 cm och inre höjd 33 cm, innehåller vatten till ett djup av 18 cm. Ett lock påskruvas lufttätt. Locket är genomborrat med ett rör, som når ned i vattnet till 2 cm från kärlets botten och upptill är kapat i lockets plan. En kolv, som lufttätt passar till röret, pressas ned i röret ända till dess nedersta del och pressar därvid ut rörets innehåll (luft och vatten) i det omgivande kärlet. Huru stort blir trycket i atmosfärer hos den inneslutna luften? Rörets diameter är 2,4 cm. Man kan försumma såväl lockets tjocklek som den volym, som upptages av rörets väggar. Det yttre lufttrycket har sitt normalvärde.

11. Ett smalt, jämtjockt glasrör är tillsmält i ena änden och är i den andra försett med en kran. Röret, som med kranen öppen intar horisontellt läge, innehåller en 30 cm lång kvicksilverpelare och på vardera sidan om denna en 40 cm lång luftpelare. Därefter stänges kranen och röret placeras i vertikal ställning. Huru långa bliva då de båda luftpelarna? Barometerståndet är 750 mm.

12. Två slutna kärl, vilka stå i förbindelse med varandra genom en kort rörledning med kran, hava vardera en volym av 1,8 liter och äro fyllda med luft av den omgivande atmosfärens tryck. Det ena innehåller dessutom en liten glaskula, fylld med flytande eter. Kranen är först stängd. Sedan kulan sönderslagits genom skakning, fyller sig kärlet småningom med mättad eterånga, och en inkopplad öppen manometer, vars ena skänkel står i förbindelse med den yttre luften, visar slutligen ett övertryck på 40,3 cm. Kranen öppnas därefter, och eterångan lämnas att sprida sig över båda kärlen. Övertrycket nedgår därvid först, växer sedan åter och stannar slutligen vid 33,7 cm. Huru mycket flytande eter fanns kvar i första kärlet, innan kranen öppnades? Temperaturen kan anses vara oförändrad under experimentets gång. Glaskulans och rörledningens volymer kunna försummas. Vid rådande temperatur och 760 mm tryck väger 1 liter luft 1,2 g. Eterånga väger 2,57 gånger mer än en lika stor volym luft av samma tryck och temperatur.

13. En glascylinder med en inre genomskärningsyta av 40 cm^2 är nedtill försedd med ett rör, vilket 2 cm under cylinderns bottenyta har en kran med fin urborrning. Röret löper genom en lufttät kautschukpropp ned i en glasflaska. Volymen av flaskan och röret upp till kranen är sammanlagt 280 cm^3. Kranen, som först är öppen, slutes, och man fyller kvicksilver i cylindern till en höjd av 5 cm över bottnen. När sedan kranen åter öppnas, neddroppar först kvicksilver i flaskan, men filtreringen avstannar i sinom tid. Hur mycket har då kvicksilverytan sjunkit i cylindern? Det yttre lufttrycket är hela tiden 740 mm. Temperaturen antages oförändrad.

14. Vid ett tillfälle, då barometerståndet var 772 mm, fylldes en behållare med luft av samma temperatur som omgivningen eller 17°. Luften var mättad med vattenånga, vars maximumtryck vid 17° är 15 mm. Behållaren tillslöts därpå och nedsattes i kolsyresnö. Vid den där rådande temperaturen, — 78° C, kan vattenångans maximumtryck sättas lika med noll. Huru stort blev nu trycket i behållaren? Gasernas utvidgningskoefficient är 1/273. Den vid avkylningen bildade isens volym kan försummas, likaså behållarens volymändring.

15. Två slutna kärl äro förbundna genom ett med kran försett rör. Kranen är från början stängd, och det ena kärlet innehåller i sin nedre del vatten, medan det andra, vars volym är 6 liter, är evakuerat. Det förra kärlet hålles vid temperaturen 40°, under det att det senare är insatt i ett vid normalt tryck kokande ångbad. Beräkna vikten av den vattenånga, som strömmar in i det tomma kärlet, om kranen öppnas. Mättnings-

trycket för 40-gradig vattenånga är 55,3 mm. 1 liter luft vid 0° och 760 mm väger 1,293 g. Vattenångas spec. vikt i förhållande till luft är 0,622. Utvidgningskoefficienten för gaser är 1/273.

16. En behållare innehåller klorknallgas, som på lämpligt sätt bringas att explodera. Efter avsvalning till begynnelsetemperaturen, som är 17°, är det alstrade klorvätets tryck 100 mm. Beräkna dess tryck ögonblicket efter reaktionen under förutsättning att klorvätets spec. värme vid konstant volym är oberoende av temperaturen och lika med 0,133 samt dess utvidgningskoefficient 1/273. Reaktionen antages förlöpa så snabbt, att intet värmeutbyte därunder hinner äga rum mellan gasen och behållaren. Under hela processen från begynnelsetillståndet till sluttillståndet avgives 600 gcal för varje gram klorväte, som bildas.

17. I ett kalorimeterkärl av glas, som innehåller 215 g vatten av 17°,2, hälles 98 g konc. svavelsyra av 17°,6 och samtidigt nedföres 150 g is, varigenom blandningstemperaturen blir 17°,4. Huru mycket värme utvecklas av varje gram svavelsyra på grund av utspädningen? Ingen hänsyn behöver tagas till kalorimeterkärlets uppvärmning. Isens smältvärme är 80, och man kan antaga, att den rena svavelsyrans spec. värme är 0,33.

18. En vidhalsad glasflaska innehåller i sin nedersta del kvicksilver och därovan nollgradigt vatten ända upp till den lufttätt tillslutande proppen. I proppen äro infogade dels ett provrör, som når ned i vattnet, dels ett fint glasrör, som nedtill utmynnar i kvicksilvret, och upptill, ovanför proppen, är omböjt, så att dess övre öppna ända pekar nedåt. I provröret nedsläppes litet kolsyresnö, och samtidigt med att denna förflyktigas, bildas kring nedre delen av provröret en ismantel. Därvid stiger kvicksilvret i det fina röret, så att till sist några droppar kvicksilver rinna ut. 9,8 g aluminium, avkylt till — 42° C, nedföres därpå i provröret, varefter detta tillkorkas. Ismanteln tillväxer nu i tjocklek, och ytterligare 1,302 g kvicksilver rinner ut. Beräkna aluminiums spec. värme. Isens smältvärme är 80, och kvicksilvers spec. vikt 13,6. Vid 0° har 1 g is en volym av 1,0908 cm^3 och 1 g vatten en volym av 1,0001 cm^3. Det får antagas, att flaskan är skyddad för all värmetillförsel från omgivningen.

19. För att bestämma eters spec. värme utfördes följande försök. I ett kalorimeterkärl av koppar, som vägde 200 g, uppvägdes 72 g eter vid 19°,5. 120 g kopparnubb upphettades till 100° och nedfördes sedan hastigt i etern. Blandningstemperaturen blev 29°,5. Eters spec. värme uppgives i den fysikaliska litteraturen vara 0,54, men vid beräkning ur de nyss angivna siffrorna erhölls ett omkring dubbelt så högt värde. Undersök, huruvida detta kan förklaras genom antagandet, att något eter

avdunstat under försöket, och framhåll därvid, ifall någon approximation blir erforderlig för de räkningar, som påkallas av undersökningen. Eters ångbildningsvärme är 89 och koppars spec. värme 0,093.

Resultat:[1] **1.** 0,001977. **2.** 1,015. **3.** 2,654. **4.** 0,7565. **5.** 50,17 cm över den yttre vattenytan. **6.** 3,468 kgf. **7.** 0,7418. **8.** 89,35 kgf. **9.** 0,1333 mg. **10.** 1,049 atm. **11.** 32,3 resp. 47.7 cm. **12.** 1,980 g. **13.** 0,56 cm. **14.** 509,0 cm. **15.** 0,2570 g. **16.** 1 655 mm. **17.** 149,4 gcal. **18.** 0,2052. **19.** Det felaktiga resultatet kan förklaras, om man antager, att omkring 2,4 g eter övergått i ångform.

Insänd litteratur.

J. KÖRNER, *Elektriska motorer och motoranläggningar.* Praktisk handbok. P. A. Norstedt & Söner, 1928. 358 sid., klotb. kr. 11: —.

A. SIGFRIDS, *Lärobok i elementär elektroteknik.* Ivar Hæggströms förlag. Häft II. Maskiner och mätare. 1923, 208 sid., kr. 6: —. Häft III. Manöver- och skyddsapparater, 1928, 232 sid., kr. 7: 50.

Svensk skolfilm och bildningsfilm, 1928, häft 3—8.

Modern ljusteknik. Utgiven av ASEA i Västerås. 2:a uppl. 1927, 117 sid.

Uppfinningarnas bok, del 4, Gruvväsen och metallurgi. Se sid. 41.

K. THAM, *Plangeometri,* 6:e uppl., 68 sid. C. E. Fritzes förlag, Stockholm. 1928, pappersb. kr. 1: 75.

K. ASPERÉN och I. DAMM, *Lärobok i räkning,* 9:e uppl. Delvis omarbetad av S. HERMANSSON, J. Beckmans förlag, Stockholm. 1928. Förra delen: 220 sid., klotb. kr. 3: —. Senare delen: 253 sid., klotb. kr. 3: —.

K. F. MÜLLER, *Der Unterricht in Physik,* 114 sid. G. Braun, Karlsruhe. 1928, kart. RM. 3: 75.

ELMER E. BURNS, *Radio, A Study of First Principles,* 255 sid. D. van Nostrand Co., New York. 1928. 2 doll.

J. KÖRNER, *Sveriges elektricitetsverksindustri,* utg. av Svenska Elektricitetsverksföreningen, 160 sid. C. E. Fritzes Hovbokhandel, Stockholm. 1928, kr. 5: —.

Gradualavhandlingar, tidskrifter, kataloger (se under vederbörande rubriker) och *årsredogörelser* från läroverk (se årg. XI, h. 4, sid. 243).

TOM MOLL, *Lärobok i fysik,* förkortad uppl. IV, Akustik och optik. 83 sid. Norstedts förlag. 1928, pappersb. kr. 1: 75.

SVEN EM. OHLON, *Lärobok i fysik,* förkortad uppl. I, Allmän fysik och värmelära. 144 sid. Norstedts förlag. 1928, pappersb. kr. 2: 80.

[1] Till underlättande av kontrollen äro resultaten angivna med den noggrannhet, varmed de erhållits vid räkning med fyrställiga tabeller, ej i en alltefter uppgiftens natur avrundad form.

Allmänna metoder vid geometriundervisningen.

Av HENRIK PETRINI.

Vid den förestående omläggningen av undervisningen vid läroverken bör man i fråga om matematiken såväl som i fråga om varje annat ämne främst beakta den ifrågavarande undervisningens ändamål. Vad realgymnasiet beträffar, är saken såtillvida klar, att matematikundervisningen bör omfatta vad som är nödvändigt för studiet av andra ämnen, främst fysik och kemi, varjämte den bör förbereda eleverna för högskolestudier. Men denna förberedelse får ej enbart omfatta bibringandet av en rent teknisk färdighet att utföra vissa räkneoperationer utan måste även innebära grundläggandet av en vetenskaplig förmåga. Denna formella sida av den matematiska skolningen har i alla tider med rätta framhållits såsom matematikens huvuduppgift, och det är den som nästan uteslutande bör vara bestämmande för matematikundervisningen på latinlinjen och i realskolan.

Båda dessa ändamål tillgodoses samtidigt genom en rationellt lagd undervisning i fråga om övningsuppgifterna. I stället för att ge lärjungarna uppgifter att lösa, som i och för sig sakna allt intresse, kan man till övningsexempel ge dem elementen av en utvidgad kurs. Detta ger dem vidgade vyer och intresse för ämnet. Den vetenskapliga behandlingen bör genomsyra all undervisning och i alldeles särskild grad matematikundervisningen. Men för matematiken spelar *metoden* huvudrollen, medan de särskilda satserna endast ha betydelse av etapper på vägen.

Tillämpas nu dessa allmänna principer på matematikundervisningen i skolan, så inses, att de allmänna metoderna böra där framställas klarare än vad i allmänhet torde

hava skett. Rent tekniskt innebär detta även den fördelen att en mängd enskilda problem kunna lösas under en gemensam synvinkel, vilket i hög grad är ägnat att väcka lärjungens kärlek till ämnet.

I matematiken mer än i något annat ämne får lärjungen en god övning i att skilja på huvudsak och bisak. Detta gäller i all synnerhet om geometrien. Men man kan ännu mer än vad hittills skett urgera denna synpunkt vid geometriundervisningen genom att framställa satserna med ett minimum av förutsättningar, varigenom satserna vinna i allmängiltighet.

Vid undervisningen har jag städse bemödat mig om att meddela allmänna metoder, som ge eleverna en överblick över större områden av ämnet och en liten inblick i hur man bär sig åt för att komma till nya resultat i matematiken. Jag vill här lämna några prov på dylika allmänna metoder, som jag meddelat på olika stadier i skolan.

1. Cevas teorem.

Cevas teorem utgör en god tillämpning av likformighetsläran och ger lärjungarna en inblick i en allmän sats, som i sig innehåller som specialfall en hel del satser, som de förut kommit till på skilda vägar, jämte åtskilliga nya. Jag brukar meddela den i första realringen i följande ordning.

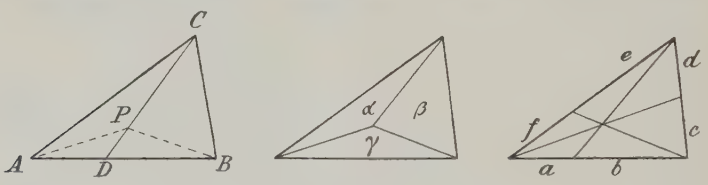


Fig. 1.

Först får klassen i en skrivning följande uppgift: *Inom triangeln ABC tages en godtycklig punkt P. Räta linjen CP skär AB i D. Bevisa, att* $\triangle PAC : \triangle PBC = DA : DB$ (fig. 1).

Uppgiften plägar lösas på olika sätt. När den satsen är klarlagd, blir tillämpningen lätt. Kalla de tre trianglarna

för α, β, γ (fig. 1); då fås

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{c}{d}=\frac{\gamma}{\alpha},\ \frac{e}{f}=\frac{\beta}{\gamma},$$

varav

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\gamma}=1.$$

Omvändningen av denna sats är Cevas teorem[1]:

Om $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=1$, *så gå linjerna genom samma punkt.*

Ty drag CD och AE samt sammanbind B med dessa linjers skärningspunkt. Låt denna linje utdragen skära AC i en punkt F_1 (fig. 2). Kalla F_1C och F_1A resp. e_1 och f_1. Då är enligt föregående sats

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e_1}{f_1}=1.$$

Härav och av antagandet följer, att $\frac{e_1}{f_1}=\frac{e}{f}$; F_1 sammanfaller alltså med F.

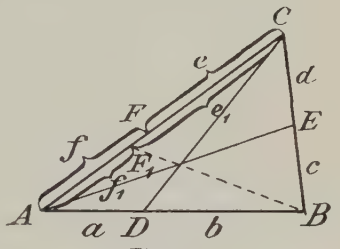


Fig. 2.

Man får nu som omedelbar följd av denna sats, att medianerna i en triangel råka varandra i en och samma punkt, likaså bissektriserna. Lika omedelbart finner man, att de räta linjer, som sammanbinda en triangels hörn med den inskrivna cirkelns tangeringspunkter med motstående sidor, råkas i en och samma punkt. En motsvarande sats fås för de vidskrivna

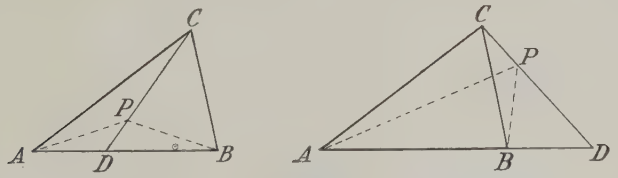


Fig. 3.

cirklarna. Har man infört definitionen på cosinus, så erhålles satsen om höjderna lika lätt. Motsvarande sats om

[1] Satsen, ej omvändningen, benämnes vanligen Cevas (läs »tjevas») teorem. *Red.*

miltpunktsnormalerna bevisas däremot ej lika enkelt med Cevas teorem.

Anm. Beviset för den grundläggande satsen blir identiskt lika, om punkten P ligger utom triangeln (fig. 3):

$$\frac{DA}{DB} = \frac{\triangle DAC}{\triangle DBC} = \frac{\triangle DAP}{\triangle DBP} = \frac{DAC - \triangle DAP}{\triangle DBC - \triangle DBP} = \frac{\triangle PAC}{\triangle PBC}.$$

2. Strålknippen.

En annan allmän metod, som passar för alla stadier av gymnasiet, är läran om strålknippen. Omedelbart efter genomgången av likformighetsläran är det lämpligt att som en tillämpning införa de grundläggande trigonometriska begreppen, och sedan kan läran om strålknippen meddelas när som helst såsom en tankeövning på det genomgångna. Det passar bra att framställa denna lära som en generalisering av den räta linjens harmoniska delning.

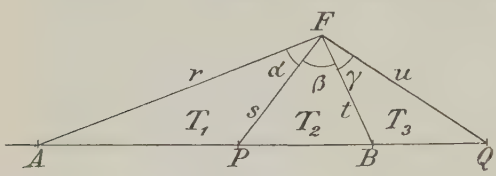


Fig. 4.

På sträckan AB (fig. 4) tages en punkt P och på dess förlängning åt B till en punkt Q. Man sätter nu

$$\frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB} = k.$$

Om $k=1$, så är sträckan AB delad harmoniskt i P och Q. Tages en godtycklig punkt F och sättes $\alpha+\beta+\gamma=\delta$ samt triangelytan $AFQ=T$, så fås:

$$k = \frac{T_1}{T_2} : \frac{T}{T_3} = \frac{\frac{1}{2}rs\sin\alpha}{\frac{1}{2}st\sin\beta} \cdot \frac{\frac{1}{2}tu\sin\gamma}{\frac{1}{2}ur\sin\delta} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\delta}.$$

Härav fås följande sats: *Om från en punkt utgå fyra strålar och detta strålknippe skäres av räta linjer, så får storheten k ett och samma värde för alla linjerna; k kallas strålknippets invariant.*

Drages från Q en rät linje, som skär strålknippets förlängning (fig. 5), så blir invarianten

$$k_1 = \frac{P_1A_1}{P_1B_1} : \frac{QA_1}{QB_1} = \frac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma} = \frac{1}{k}.$$

Om $k=1$, säges strålknippet vara *harmoniskt*.

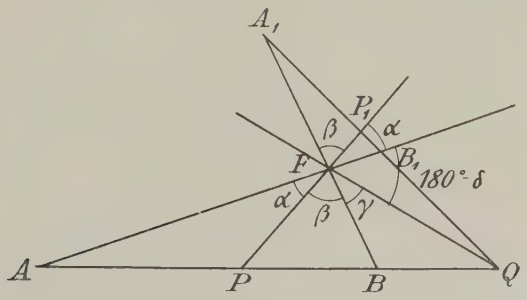


Fig. 5.

Den harmoniska fyrsidingen. Drar man ut sidorna i fyrsidingen $ABCD$, fås en »fullständig fyrsiding» med sex hörn och tre diagonaler (fig. 6).

Strålknippet E är harmoniskt. Ty betecknar man med k invarianten för strålknippet E, så är storheten k densamma

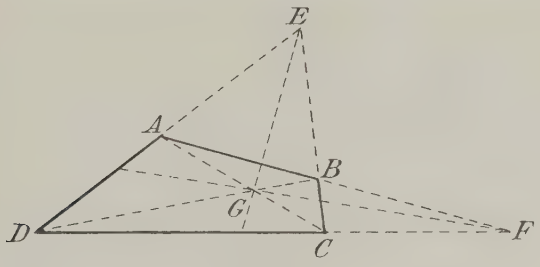


Fig. 6.

för DF och AF. Men strålknippet G skär DF och AF i samma punkter som strålknippet E; alltså är invarianten för strålknippet G också $= k$. Nu skäres detta strålknippe av AF på andra sidan om G; alltså är invarianten där $= \frac{1}{k}$, varav följer $k = \frac{1}{k}$, som ger $k=1$. Följaktligen äro

strålknippena E och G harmoniska. Likaså är strålknippet F harmoniskt.

3. Tangentkordans harmoniska egenskaper.

Från origo (A i fig. 7) drages en rät linje, som skär en konisk sektion i två punkter (P och Q). Det begäres att finna *orten för den fjärde harmoniska punkten* (B), *när linjen vrider sig kring origo.*

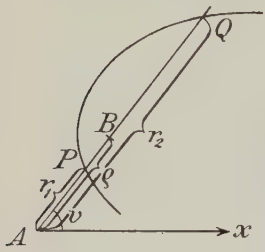


Fig. 7.

I den allmänna andragradsekvationen

$$A x^2+B y^2+C xy+D x+E y+F=0$$

sätter man: $x=r\cos v$, $y=r\sin v$ och låter r_1 och r_2 vara rötterna till ekvationen, då v är känd. Den fjärde harmoniska punkten $(\bar{x}, \bar{y})$ bestämmes av ekvationerna:

$$\bar{x}=\varrho\cdot\cos v,\quad \bar{y}=\varrho\cdot\sin v,\quad \text{där } \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{\varrho}.$$

Man finner då

$$A\cos^2 v+B\sin^2 v+C\sin v\cdot\cos v+$$

$$+\frac{1}{r}(D\cos v+E\sin v)+\frac{1}{r^2}\cdot F=0.$$

$$\therefore\ \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=-\frac{D\cos v+E\sin v}{F}=\frac{2}{\varrho},$$

$$D\varrho\cdot\cos v+E\varrho\cdot\sin v+2F=0$$

eller

$$D\bar{x}+E\bar{y}+2F=0.$$

Detta är en rät linje. Vrides linjen så, att P och Q sammanfalla, måste B, som ligger mellan P och Q, sammanfalla med dessa punkter. Den sökta orten blir alltså tangentkordan för origo.

En vacker tillämpning av denna sats och av satsen om den harmoniska fyrsidingen är den kända konstruktionen av en tangent till en konisk sektion från en given yttre punkt, utförd med användning enbart av linjal.

Från den givna punkten P (fig. 8) dragas två godtyckliga sekanter, PAB och PCD, och fyrhörningen $ABDC$ göres fullständig. Strålknippet Q är harmoniskt; alltså är E den

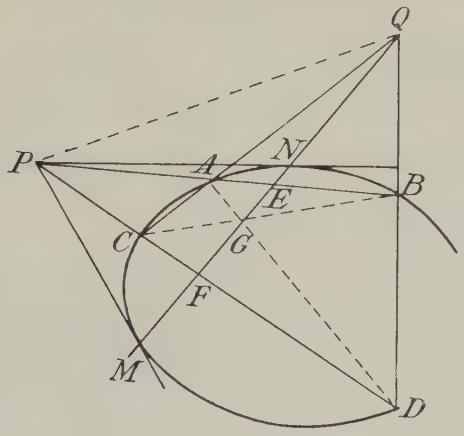


Fig. 8.

fjärde harmoniska punkten till B, A och P. Således ligger E på tangentkordan till P, likaså F. Följaktligen är QG tangentkorda till P och PM och PN äro tangenter.

4. Projektionssatser.

Man kan även på en annan väg, som här skall påvisas, komma fram till ett bevis för den harmoniska egenskapen hos tangentkordan till en konisk sektion.

Förhållandet mellan en rät linjes delar är lika med förhållandet mellan delarnas projektioner; $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ (fig. 9). Härav följer, att »k» för en rät linje och för dess projektion är densamma. Om således projektionen är harmoniskt delad, så är linjen själv också harmoniskt delad.

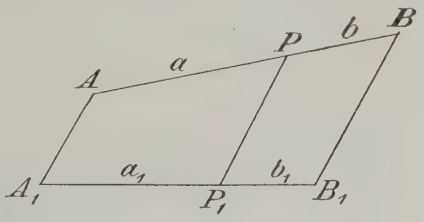


Fig. 9.

Nu delas en genom en punkt gående sekant till en cirkel harmoniskt av punktens tangentkorda (fig 10). Ty för strålknippet M är invarianten $k = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\delta}$, och för punkten V är invarianten $= \frac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma} = \frac{1}{k}$. Sekanten skäres i samma punkter av båda strålknippena, varav följer, att invarianterna äro lika, d. v. s. $k = \frac{1}{k}$. Följaktligen är $k = 1$, d. v. s. delningen är harmonisk.

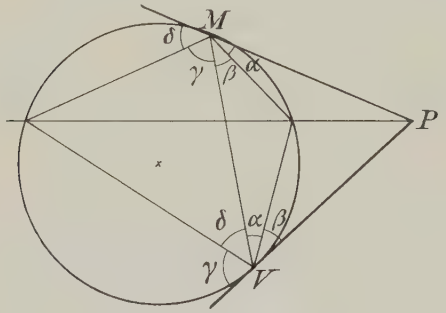


Fig. 10.

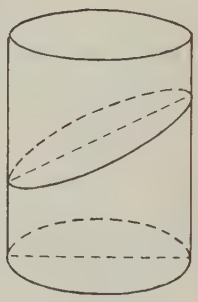


Fig. 11.

Betraktar man cirkeln som den cylindriska projektionen av en ellips (fig 11), så svara parallella kordor i ellipsen mot parallella kordor i cirkeln, ett par konjugatdiametrar i ellipsen mot ett par vinkelräta diametrar i cirkeln, en tangent och en tangentkorda i ellipsen mot resp. en tangent och en tangentkorda i cirkeln. Härav framgår omedelbart, att en sekant till en ellips skäres harmoniskt av tangentkordan.

Betraktar man ellipsen som en sned skärning av en cirkulär kon (fig. 12), så ligga två motsvarande punkter (A och A_1; B och B_1, se fig. 12 b) på samma generatris, och två motsvarande räta linjer ligga i ett plan, som går genom konens spets. Beräkningen blir nu något mer komplicerad än nyss men meddelas för fullständighetens skull.

Låt O vara konens spets, AB en korda i ellipsen och

A_1B_1 motsvarande korda i cirkeln. Mot en punkt P på AB svarar punkten P_1 på A_1B_1. Strålknippet O (fig. 12 a) skäres av TB och TB_1; således är invarianten densamma, d. v. s.

$$\frac{a}{b} : \frac{r}{s} = \frac{a_1}{b_1} : \frac{r_1}{s_1}.$$

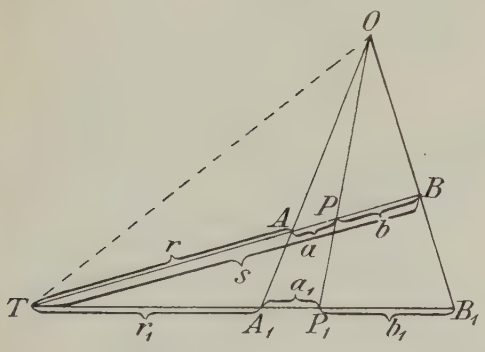


Fig. 12 a.

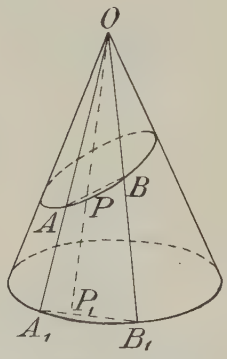


Fig. 12 b.

För en annan punkt, Q, på AB fås på samma sätt, om $QA=c$, $QB=d$, etc.

$$\frac{c}{d} : \frac{r}{s} = \frac{c_1}{d_1} : \frac{r_1}{s_1}.$$

Följaktligen

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} : \frac{c_1}{d_1}.$$

Denna relation visar, att de fyra strålarna OA_1, OP_1, OQ_1 och OB_1 skära kordorna AB och A_1B_1 så, att invarianten för båda kordorna blir densamma. Om således A_1B_1 är harmoniskt delad i P_1 och Q_1 ($k=1$), så är även AB harmoniskt delad i P och Q.

Med denna metod fås tangentkordans harmoniska egenskaper ej blott för en ellips utan även för en konisk sektion i allmänhet. Ligga punkterna A och B på olika grenar av samma hyperbel, så blir figuren något olika, men resultatet blir detsamma.

5. Tillämpningar på problem.

Några svårare problem ha vid skrivningar lösts av en och annan av mina lärjungar med hjälp av allmänna metoder.

Ex. 1 V. T. 1921. *En rätvinklig triangel ABC är given. På kateterna AB och AC äro utåt uppritade kvadraterna ABDE och ACFG. De räta linjerna CD och BF äro dragna och råkas i punkten H. Bevisa, att den räta linjen AH är vinkelrät mot hypotenusan BC.*

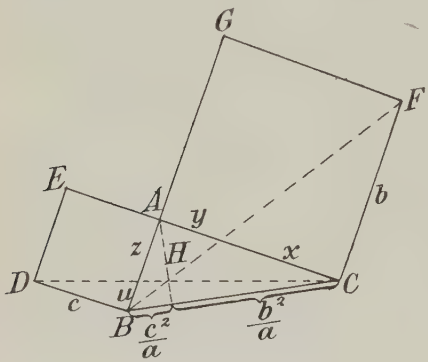


Fig. 13.

Drages höjden mot BC (fig. 13), så går den genom H enligt Cevas teorem, om nämligen $\frac{c^2}{a} \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u}$ är $=1$, vilket är fallet. Ty av likformiga trianglar fås, att

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c} \quad \text{och} \quad \frac{z}{u} = \frac{b}{c}.$$

Ex. 2 V. T. 1908. *A och B äro två punkter på en ellips, vilkas inbördes avstånd synas från medelpunkten under rät vinkel. Bevisa, att medelpunktens avstånd från linjen AB är konstant.*

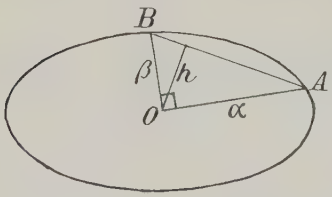


Fig. 14.

Tagas OA och OB till koordinataxlar (fig. 14), så blir ellipsens ekvation

$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy = 1,$$

där $A_1 = \frac{1}{\alpha^2}$ och $B_1 = \frac{1}{\beta^2}$. Men $A_1 + B_1$ är invariant, vilket ju på olika sätt lätt kan bevisas[1].

[1] Se t. ex. tillägget till COLLINS analytiska geometri eller denna tidskrift årg. 3, sid. 136. Satsen bevisas ju också enkelt med användning av polära koordinater. *Red.*

Således $$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{h^2}=\text{konstant.}$$

Ex. 3. *Genom ena ändpunkten av storaxeln till en ellips drages en godtycklig korda och genom ena ändpunkten av den mindre axeln en korda, som är parallell med den förra. Visa, att kordornas övriga ändpunkter ligga på ett par konjugatdiametrar.*

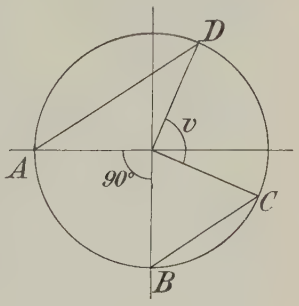


Fig. 15.

Betraktas ellipsen som en sned skärning av en cirkulär cylinder, så är satsen bevisad, om den kan bevisas för en cirkel, vilket senare inses omedelbart. Enligt fig. 15 får man $v = 90°$, ty bågen $AB =$ bågen CD. Satsen gäller med samma bevis även om axlarna ersättas av ett par konjugatdiametrar.

Forts.

Kapacitet och självinduktion i växelströmsläran.

Den experimentella behandlingen å gymnasialstadiet.

Av TORSTEN WETTERBLAD.

Studiet av växelströmmarna har i den hittills gällande undervisningsplanen för tredje ringens kurs i fysik spelat en underordnad roll. Inför det faktum, att de sista årtiondenas tekniska framsteg till stor del möjliggjorts tack vare ökade kunskaper och erfarenheter om växelströmmarna, måste man därför med tillfredsställelse hälsa det framkomna förslaget att i sista ringens kurs upptaga växelströmsläran till utförligare behandling. Under alla förhållanden kan det självfallet endast bli fråga om en efter elevernas matematiska och fysikaliska kunskapsnivå avpassad *orientering* i de viktigaste begreppen och företeelserna. Stor vikt måste komma att ligga på en enkel och lättfattlig *experimentell* framställning av lärostoffet.

Vid föreläsningar för lärarkandidater i Stockholm har jag demonstrerat ett antal skolexperiment för att klargöra växelströmmars förhållande till kapaciteter och självinduktioner. På därom uttalad önskan lämnar jag i det följande en redogörelse för dessa (exp. 1—9); exp. 10 är utarbetat senare. Experimenten göra icke anspråk på att vara originella, idéerna till flertalet av dem ha hämtats från främmande källor. Den experimentella utrustningen har gjorts så enkel som möjligt. Som mätinstrument för effektiva spänningar och strömstyrkor ha utom i det sista, mera kvantitativa försöket glödlampor använts, som variabla självinduktioner och kapaciteter de i en föregående uppsats (*Kapacitet och självinduktion*, denna tidskrift, mars 1928) omnämnda,

speciellt för detta ändamål förfärdigade uppsättningarna. Den av LEMOINE[1] konstruerade oscillografen har varit ett värdefullt hjälpmedel vid demonstration av fasdifferenser. Generator för den 50-periodiga växelströmmen har varit en enankaromformare, från vilken med tillhjälp av ett asbestgittermotstånd av LEMOINES konstruktion godtycklig spänning upp till maskinspänningen (155, 135 eller 78 volt) kunde uttagas. Det induktiva motståndet hos omnämnda induktionsspole (likströmsmotstånd = 3 ohm) kan för periodtalet 50 genom inskjutande av järnkärnan kontinuerligt förändras från 30 till närmare 400, kapacitetsmotståndet genom uttagning av proppar stegvis från 100 till 3 000 enheter. Som härav framgår, existerar ett gemensamt motståndsområde 100—400, en omständighet, som är till stor fördel vid experimenten 6, 8 och 9.

Det bör särskilt framhållas, att nedan meddelade experimentella data hänföra sig till omnämnda induktionsspole och kapacitetssats.

Exp. 1. Kapaciteters och självinduktioners förhållande till likström och växelström (fig. 1).

Över en tvåpolig knivomkastare insläppes alternativt likström och växelström. Kapaciteten (C) = 30 μF, självinduktion (L) = spolen med helt inskjuten järnkärna. Glödlampan G_2 bör ha relativt litet motstånd, för att induktansen skall överväga. Jag har med fördel använt tvenne Osramlampor 110 volt, 40 watt. Vid cirka 50 volts lik- och växelspänning blir lampan G_1 för likström mörk, för växelström ljus; lampan G_2 blir för likström ljus, för växelström mörk. Önskar man av pedagogiska skäl ej obetingat mörker, kan naturligtvis spänningen ökas, varvid starka *ändringar* i ljusstyrkan kunna konstateras.

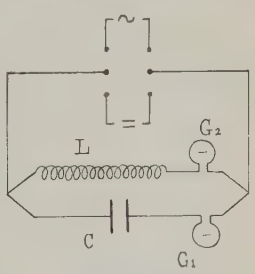


Fig. 1.

[1] LEMOINE, Meddelande om ny materiell häft. 4. Skolmateriellavdelningen. P. A. Norstedt & Söners förlag 1927.

Exp. 2. Fasförskjutning mellan spänning och ström genom självinduktion (fig. 2).

Från spänningsuttaget gå tvenne parallella ledningar till var sitt av oscillografens vibrerande system. Den ena ledningen innehåller induktionsspolen (L), den andra ett induktionsfritt asbestgittermotstånd (R) på cirka 80 ohm. Systemet s_1 svänger följaktligen i takt med strömmen genom L, systemet s_2 med spänningen. För att av oscillogrammen kunna avgöra fasförskjutningens riktning behöver man endast något förskjuta järnkärnan, varvid strömkurvan ändrar gestalt. Om samtidigt hänsyn tages till den roterande spegelns[1] rotationsriktning framgår lätt, att strömmen löper efter spänningen. Fasförskjutningen blir, tack vare att det ohmska motståndet hos spolen är litet, i det närmaste 90°, speciellt om järnkärnan inskjutes. Önskar man visa, att fasförskjutningen är beroende av ett i serie med självinduktionen befintligt motstånd, kan det till systemet s_1 hörande barlastmotståndet[1] (40 ohm) inkopplas.

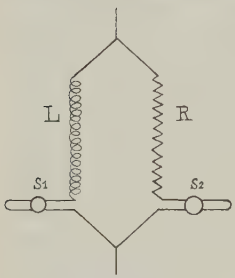


Fig. 2.

Exp. 3. Det induktiva motståndets beroende av självinduktionens storlek (fig. 3).

En glödlampa G_1 är kopplad i serie med induktionsspolen. Vid lämpligt vald arbetsspänning lyser lampan, om järnkärnan är utdragen, blir däremot mörk (eventuellt ljussvagare), om järnkärnan skjutes in. Bästa effekten uppnås, om lampan har ett ohmskt motstånd likvärdigt med det maximala växelströmsmotståndet. Till ifrågavarande spole är en Osramlampa 110 volt, 40 watt, mycket lämplig. Med en till spolen parallellkopplad lampa G_2 kan man visa, att spänningen mellan spolens ändpunkter tilltar vid ökad självinduktion. Man

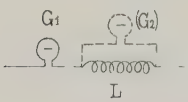


Fig. 3.

[1] Lemoine l. c.

kan då lätt åstadkomma, att G_1 lyser, medan G_2 är mörk, och tvärtom. Lampan G_2 bör ha ett ganska stort motstånd. Jag har använt en Osramlampa 110 volt, 10 watt.

Exp. 4. Fasförskjutning mellan spänning och ström genom kapacitet (fig. 4).

Försöksanordningen skiljer sig från den i experiment 2 omtalade så till vida, att i den ena grenen kondensatorsatsen inkopplats i stället för induktionsspolen. Fasförskjutningens riktning kan lätt avgöras, om man något förändrar kapacitetens storlek, varvid strömkurvan ändrar form. Strömmen visar sig i detta fall gå före spänningen. Fasförskjutningen blir även här i det närmaste 90° men kan göras mindre genom inkoppling av barlastmotståndet. Minskningen framträder tydligast vid stor kapacitet.

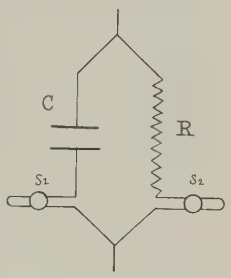


Fig. 4.

Exp. 5. Kapacitetsmotståndets beroende av kapacitetens storlek (fig. 5).

Anordningarna äro desamma som vid experiment 3. Vid stor kapacitet ($30\,\mu F$) är lampan G_1 ljus och G_2 mörk; minskas kapaciteten till $5\,\mu F$ eller därunder, inträffar det motsatta förhållandet. G_1 har varit en Osramlampa 110 volt, 40 watt, G_2 en Osramlampa 220 (eller 110) volt, 10 watt.

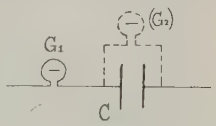


Fig. 5.

Exp. 6. Kompensation av genom kapacitet framkallad fasförskjutning medelst självinduktion (fig. 6).

I den ena av oscillografens parallella grenar äro kapacitet och induktionsspole kopplade efter varandra, den andra grenen innehåller som förut det induktionsfria motståndet. Kapaciteten inställes på 20 à 30 μF. Om järnkärnan

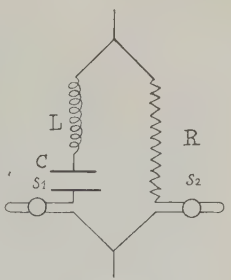


Fig. 6.

drages ut, inträffar vid ett visst läge, att ström- och spänningskurvorna komma i fas med varandra. På ena sidan om detta läge (längre inskjuten kärna) går strömmen efter spänningen, på den andra sidan (längre utdragen kärna) går strömmen före. För att icke strömamplituden i kompensationsläget skall bli för stor, bör det omnämnda barlastmotståndet vara inkopplat.

Exp. 7. Fasförskjutning genom kapacitet i relation till fasförskjutning genom självinduktion (fig. 7).

Experimentet är på basis av experimenten 2 och 4 självklart och därför av mindre betydelse men torde underlätta förståelsen av experiment 9. I den ena av de till de vibrerande systemen gående ledningarna är kapaciteten inkopplad, i den andra självinduktionen. Barlastmotståndet bör vara frånkopplat. Det visar sig, att fasdifferensen mellan de bägge strömkurvorna är i det närmaste 180°. Detta fasförhållande ändras icke nämnvärt vid måttliga variationer av C och L.

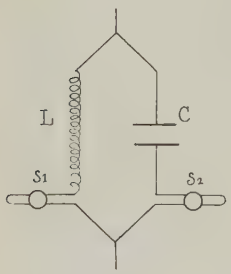


Fig. 7.

Exp. 8. Addition av effektiva spänningar (fig. 8).

Induktionsspole och kondensatorsats kopplas efter varandra och parallellt till vardera de lika glödlamporna G_1 och G_2 (Osram 110 volt, 10 watt); b sättes först i förbindelse med e. G_1 och G_2 mäta då de effektiva partialspänningarna a—b och b—c. Kapaciteten är 20 à 30 μF och järnkärnan drages ut, så att lamporna lysa lika starkt (spänningarna lika stora). Förbindelsen mellan b och e brytes härefter (vid d). Totala effektivspänningen a—c mätes nu av summan av lampornas spänningar. Vore summan av partialspänningarna

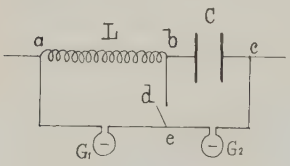


Fig. 8.

a—b och b—c = totalspänningen a—c, skulle lamporna lysa lika starkt som förut. Nu inträffar emellertid, att bägge lampornas ljus starkt försvagas (eventuellt försvinner), beroende på den förefintliga stora fasdifferensen. Ju mindre spolens ohmska motstånd och »järnmotstånd» äro, desto skarpare framträder fenomenet. Med den här använda spolen är fasdifferensen i det närmaste 180° (jfr exp. 7), varför omnämnda läge hos järnkärnan för lika partialspänning nära överensstämmer med läget för »spänningsresonans» $\left(4\pi^2 n^2 = \frac{1}{L \cdot C};\ n = \text{periodtalet}\right)$. På grund härav blir effekten mycket starkt framträdande, och experimentet visar tydligt, att effektiva spänningar ej få summeras på vanligt sätt.

Exp. 9. Addition av effektiva strömstyrkor (fig. 9).

Kondensatorsats och induktionsspole äro kopplade parallellt, och ledningarna innehålla var sin billampa (Osram 6—8 volt, 21 normalljus). G_3 är en tredje lampa av samma slag, som mäter summan av grenströmmarna; eventuellt kan av pedagogiska skäl även en fjärde lampa G_4 inkopplas (se fig.). Om järnkärnan inställes så, att G_1 och G_2 lysa lika starkt ($C = 20$ à $30\ \mu F$), är G_3 (och G_4) mörk. Förskjutes järnkärnan åt ena eller andra hållet, överväger endera av strömmarna genom C och L, och G_3 (samt G_4) lyser upp. Förklaringen är enkel på grundvalen av exp. 7. Strömmarna genom C och L ha i det närmaste 180° fasdifferens. Äro deras amplituder lika, blir resulterande amplituden nästan noll, i annat fall större. Inställningen för lika ljusstyrka (= lika strömstyrka) överensstämmer nära med inställningen för »strömresonans», varför effekten blir mycket starkt utpräglad. Experimentet visar, att effektiva strömstyrkor ej heller få summeras på vanligt sätt.

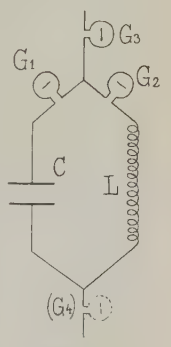


Fig. 9.

Exp. 10. Kvantitativ bestämning av fasfaktorn hos en ledning innehållande självinduktion (fig. 10).

I Moll-Rudbergs lärobok är effektlagen för växelström $P = I \cdot V \cdot \cos \varphi$ bevisad. Med tillhjälp av denna lag kunna fasfaktorn och fasvinkeln experimentellt bestämmas. Parallellt till en ledning, innehållande ohmskt motstånd och självinduktion (obs.! ingen järnkärna), kopplas en voltmeter och i serie en ampèremeter. Instrumenten böra vara graderade för såväl likström som växelström. Först sändes likström genom ledningen. Den utvecklade effekten är $I \cdot V_1$ watt. Därpå sändes en *lika stark* växelström genom ledningen. Spänningen har nu stigit till V volt. Eleven torde ej ha svårt att fatta, att den utvecklade effekten enligt Joules lag fortfarande är $I \cdot V_1$ watt, enligt effektlagen för växelström är den emellertid $I \cdot V \cdot \cos \varphi$ watt. Härav fås $I \cdot V_1 = I \cdot V \cdot \cos \varphi$ och $\cos \varphi = \frac{V_1}{V}$. Förut omnämnda induktionsspole har även här använts och kopplats i serie med ett vanligt skjutmotstånd. Fasvinkeln kan då efter godtycke varieras, vartill även bidrager, att spolen består av tre delar, av vilka antingen en ensam eller två och tre seriekopplade kunna användas.[1] — Ovanstående deduktion gäller icke om järnkärnan användes, då en del av den av växelströmmen tillförda energien som bekant användes för uppvärmning av kärnan (virvelströmmar, hysteresis).

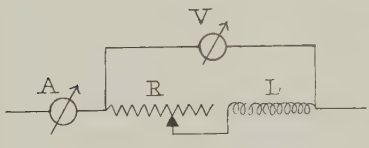


Fig. 10.

Att på samma enkla sätt bestämma fasfaktorn för en ledning innehållande kapacitet omöjliggöres av att densamma helt blockerar likström. En generell metod finnes: kombinerade avläsningar å watt-, volt- och ampèremeter. Jag är emellertid icke övertygad om denna metods lämplighet på skolstadiet.

I nedanstående tabell meddelas några mätserier såsom prov på här utvecklade metods användbarhet.

[1] I alla föregående experiment har hela spolens induktion utnyttjats.

Tabell.

	I i amp.	V_1 i volt	V i volt	$\cos\varphi$	φ
Serie I	0,92	15,8	17,4	0,91	26°
	1,13	19,9	22,3	0,89	
	1,38	24,8	27,3	0,91	
	1,62	29,5	32,7	0,90	
Serie II	0,90	15,2	24,0	0,63	51°
	1,00	16,7	26,3	0,64	
	1,13	19,5	31,5	0,62	
	1,40	25,4	40,5	0,63	
Serie III	0,82	15,5	31,2	0,50	61°
	1,01	18,3	37,8	0,48	
	1,13	21,6	44,2	0,49	
	1,22	23,3	49,0	0,48	

»Camera obscura»-fenomenets omvändning.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

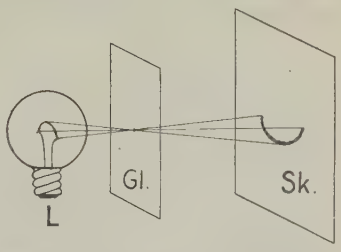
Alla författare av läroböcker i fysik bruka börja optiken med en redogörelse för »camera obscura»-fenomenet. Säkerligen är denna inledning mycket lämplig; fenomenet klarlägger ju synnerligen väl ljusets rätliniga fortplantning, det är lätt att demonstrera och dessutom av stor historisk betydelse. Vid försöket brukar förf. begagna sig av en koltrådslampa samt tvenne kartongstycken, det ena försett med ett hål av godtycklig form och c:a 1 mm^2 genomskärningsyta. Den upp och nedvända bilden av den lysande glödtråden uppfångas på det andra kartongstycket, varvid man visar, hur bildens storlek ändras med lampans och kartongstyckenas inbördes avstånd. Rummet måste givetvis i övrigt vara förmörkat.

»Camera obscura»-fenomenet har i viss mån fått praktisk användning. Redan på 1000-talet begagnades hålkameran vid studiet av solförmörkelser, varvid dessa iakttogos på en skärm bakom ett litet hål i väggen till ett förmörkat rum. Kameran bibehöll sedan sin betydelse för dylika astronomiska observationer ända framåt slutet av 1700-talet, då instrumentet på allvar utträngdes av tuberna.

Numera användes hålkameran ej så sällan av fotografer, vid upptagningar under stor synvinkel. »Hålobjektivet» äger nämligen stora förtjänster, när det gäller riktigt återgivande av proportioner. Dess »ljusstyrka» är därjämte tillräcklig för att med våra dagars mycket ljuskänsliga negativmaterial tillåta även relativt korta exponeringar, och skärpan är vid lämpligt vald diameter hos öppningen fullgod.

Mindre bekant torde vara ett fenomen, som lämpligen kan

kallas en omvändning av »camera obscura»-fenomenet. Det är det skuggfenomen, som uppstår, när det lilla hålet ersättes av en ogenomskinlig kropp av små dimensioner; i stället för ett mörkt rum får man här ett ljust sådant. Tillvägagångssättet vid fenomenets demonstration är följande (se vidstående figur).



På en glasskiva (Gl) göres med tusch en liten mörk fläck. Fläcken bör vara mycket liten och kan hava godtycklig form. Framför glasskivan uppsättes en elektrisk lampa med mycket enkelt formad glödtråd. Förf. har använt en lampa (6 V) med glödtråden böjd i en enkel, halvcirkelformad båge med 7 à 8 mm diameter. Sannolikt är det bättre att använda en lampa med något större lyskropp; dock måste den som sagt ha en enkel form. Förf. har med ganska gott resultat gjort försök med en vanlig koltrådslampa, som dock med sin dubbla slinga nog representerar gränsen för det tillåtna i fråga om komplicerad form.

Glasskivan med den lilla svarta fläcken placeras mellan lampan och en skärm (Sk). Skärmen belyses därvid av lampan, men för varje liten lysande punkt på glödtråden uppkommer på skärmen en skugga av den mörka fläcken. Resultatet blir, att en upp och nedvänd skuggbild av lystråden erhålles på skärmen. Är fläcken på glasskivan tillräckligt liten, framträder bilden med stor tydlighet.

Vid försöket med den lilla glödlampan måste förf. — på grund av glödtrådens ringa utsträckning — använda tuschfläckar, mindre än 1 mm i diameter (c:a 0,3 à 0,4 mm).

Det beskrivna »omvändningsförsöket» bör med fördel kunna tjäna som ett komplement till den experimentella framställningen av »camera obscura»-fenomenet. Det synes vara föga känt och upptages ej i de vanliga läroböckerna. Förf. kom att intressera sig för detsamma på grund av en uppsats av professor H. Oschatz i Physikalischer Unterricht, Bd I, sid. 78—79, 1921.

Ett elektrolysförsök.

Av ALBERT BJÖRKESON.

Många egenskaper hos glas göra, att vi måste betrakta det som en vätska med mycket stor viskositet eller, som man ibland plägar uttrycka det, som en lösning i fast form. Det här omtalade försöket, som visar, att glas kan tjänstgöra som elektrolyt, är ett ytterligare stöd härför. Det grundar sig på en metod, som i Amerika bland annat använts för att framställa fotoelektriska celler, och kan utföras på flera olika sätt. Undertecknad har med nedan beskrivna anordning, som torde kunna åstadkommas på de flesta av våra skollaboratorier, erhållit vackra resultat.

En vanlig glödlampa av natriumglas (Osrams 110 volts 25-ljuslampa lämpar sig utmärkt) fastsättes i ett stativ med fattningen uppåt. Glaset får doppa cirka 2 cm djupt ned i en skål med smält natriumnitrat (smältpunkt 312° C). — Man kan även använda en vattenlösning av något natriumsalt vid rumstemperatur, men försöket går då mycket långsammare. — Tråden i lampan hålles glödande med 125 volts växelström (nolledningen och en fas), och strömstyrkan i lampan regleras med ett lämpligt motstånd (cirka 100 ohm), placerat på spänningssidan i serie med lampan. Till växelströmmens nolledning kopplas även nollsidan av likströmsledningen å 220 volt och den positiva spänningssidan kopplas via en 220 volts glödlampa, tjänstgörande som säkerhetsmotstånd, till en koppartråd, insatt i det smälta natriumsaltet.

Regleras förkopplingsmotståndet så, att 110 voltslampan lyser klart, går en elektrisk ström från koppartråden genom det smälta saltet och glaset till glödtråden. Denna ströms styrka bestämmes nästan uteslutande av glödströmmen genom lampan, och den kan utan fara bringas upp till 0,1

amp. Efter en stund uppstår i glasballongens övre, kalla del en beläggning av metalliskt natrium, som blir allt tjockare ju längre strömmen pågår. Undersökes glasväggen efteråt, finner man, att den är fullkomligt oförändrad, hur mycket natrium, som än utfällts, och resultatet är sålunda, att natrium gått genom glasväggen, från saltet in i ballongen.

Anoden är vid detta elektrolysförsök koppartråden, och till den gå på vanligt sätt nitratjonerna under bildning av kopparnitrat. Katoden är glödlampans vakuum, som göres ledande genom de från glödtråden utsända elektronerna. Elektrolyten är dels det smälta saltet, dels glaset självt. De positiva natriumjonerna gå från båda dessa och falla ut som metalliskt natrium på katoden, d. v. s. på glasväggens insida. Då den nedre delen av glaset befinner sig vid 312° temperatur, destillerar metallen omedelbart över och kondenseras på den övre, kallare delen av glasballongen. Resultatet blir sålunda en beläggning av natrium därstädes.

Att den utfällda metallen delvis härrör från natrium i glaset och ej blott från saltets joner, som passerat genom glaset, bevisas av att försöket misslyckas, om lampan ej är gjord av natriumglas. Å andra sidan synas de från glaset tagna natriumjonerna ersättas av joner från saltet, då, som ovan nämndes, obegränsade mängder metall kunna införas i ballongen, utan att glaset efteråt på något sätt är förändrat.

Sedan man i ballongen erhållit tillräckligt med natrium, kan metallen lätt överföras till den del av glasväggen man önskar, t. ex. den nedre. Denna del nedsättes då, sedan lampan fått svalna, i en skål med kallt vatten, och lampans övriga del upphettas med en bunsenlåga, då metallen destillerar över till den kallare delen av glaset. För att förebygga kondensation på tråden bör denna under destillationen hållas glödande. Upphettningen får ej ske för hastigt, ty blir natriumångans tryck för stort, bildas ljusbåge i lampan, och glödtråden går då lätt sönder. — Den så erhållna natriummetallen är på insidan matt silvervit och på utsidan mot glaset glänsande, så att glaset på de av metallen belagda ställena ser ut, som vore det vackert försilvrat.

Nya undersökningar över isotopi.

Av G. STARCK.

Sedan J. J. THOMSON år 1913 gjort det troligt, att neon är en blandning av två atomslag med massorna 20 och 22, lyckades F. W. ASTON år 1919 icke blott bekräfta detta förhållande utan även visa, att flera andra grundämnen, bland dem klor, äro blandningar av isotopa atomer, vilkas massor uttryckas med hela tal, då syre = 16. Väte, kol, syre m. fl. visade sig innehålla ett enda atomslag. Separationen av isotoperna skedde i ASTONS mass-spektrograf och grundade sig på att en ström av atomjoner med samma laddning och massa, t. ex. $\overset{+}{N}e^{20}$, men olika hastighet, vid avböjning först i ett elektriskt fält, därpå åt motsatt håll i ett magnetiskt fält, kan fokusseras till en punkt på en fotografisk plåt, skild från den punkt, till vilken en ström av t. ex. $\overset{+}{N}e^{22}$ under samma omständigheter fokusseras. Resultatet av arbetena med den första mass-spektrografen kan i korthet sägas vara, att mer än 50 element visade sig vara isotopblandningar, och att alla atomers massor med undantag för vätets kunna uttryckas som hela tal, då 0 = 16.

Redan tidigt gjorde sig gällande behovet av större upplösningsförmåga och ökad noggrannhet hos spektrografen, dels för att bestämma några av de tunga elementens masslinjer, vilka i den ursprungliga apparaten icke kunnat tydligt åtskiljas, dels för att undersöka eventuella avvikelser från heltalsregeln. Övergången från de först använda kanalstrålarna till accelererade anodstrålar ökade för en tid originalspektrografens användbarhet, men sedan avvikelserna

från heltalsregeln börjat undersökas av J. L. Costa i Frankrike med en spektrograf, vars noggrannhet är 1 : 3000, blev det nödvändigt för Aston att bygga en ny spektrograf. Betydelsen härav motiveras med att bestämningen av av vikelserna från heltalsregeln är en av de få vägar, som stå oss till buds för studiet av atomkärnans struktur. För den nya, av Aston byggda spektrografen och för de intressanta resultat, som han därmed erhållit, gives en redogörelse i Proc. Roy. Soc. London, *115*, 487, 1927, som här skall i korthet refereras.

Det nya instrumentets konstruktion framgår av fig. 1.

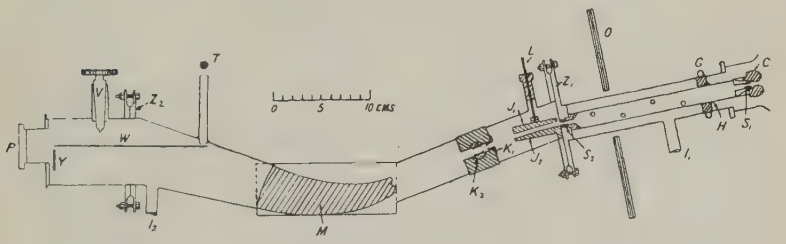


Fig. 1.

Det är i princip lika med den ursprungliga mass-spektrografen, som nu torde vara allmänt känd tack vare beskrivningar i hand- och läroböcker och i populära arbeten. Endast konstruktionsdetaljer skilja, vilkas beskrivning skulle föra för långt. Längst till höger, ej återgiven i fig. 1, är ett urladdningsrör; C är katoden, S_1 och S_2 två spalter, 0,02 mm vida. Mellan J_1 och J_2 appliceras det elektriska fältet, av storleksordningen 200—400 volt; 400 volt räcker för att ge en avböjning av $^1/_6$ radian åt strålar med en energi av 40 kilovolt. Efter spalten $K_1 K_2$ kommer magnetfältet M av storleksordningen 10 000—20 000 gauss, motsvarande en strömstyrka av 0,5—5,0 amp. W är den fotografiska plåten. Strålarnas väg är cirka 70 cm. Det uppges, att apparaten tillåter att skilja linjer, som differera med 1 på 600, och att noggrannheten kan uppdrivas till 1 på 10 000.

Den exakta jämförelsen av två massor, som ge linjer i ett mass-spektrum, förutsätter uppmätningen av två stor-

heter: avståndet mellan linjerna och dispersionskonstanten. Det första måste vara litet och uppmätes med en komparator. Den senare bestämmes indirekt genom mätning av långa avstånd mellan linjer, vilkas massdifferenser äro kända med tillräcklig noggrannhet. Sådana referenslinjer lämnas av syre och kolvätejoner. I de flesta fall är avståndet mellan de linjer, vilkas massdifferenser skola exakt bestämmas, alltför stort för att man skall komma fram på denna väg, eftersom dispersionskonstanten är olika i olika delar av spektret. Genom konstgrepp, vilkas beskrivning i detalj här skulle taga för stor plats, men som kunna sägas gå ut på att genom variation av spänningen J_1—J_2 bringa linjerna i grannskapet av varandra, har Aston lyckats övervinna denna svårighet.

Alltsedan upptäckten av heltalsregeln har det antagits, att vid uppbyggandet av en atom endast två enheter komma i fråga, nämligen protonen (vätekärnan) och elektronen. Om massan vore additiv, skulle, eftersom väteatomen består av en proton och en elektron, alla atomers massor vara hela tal, om $H = 1$. Redan mätningar med den första massspektrografen visade, att så ej är fallet. Skälet härtill är, att vid atomernas bildning energi frigöres och en motsvarande massminskning inträder. Ju större denna massdefekt är, dess stabilare är den bildade atomkärnan. Härav framgår den stora betydelsen av en exakt bestämning av atommassornas avvikelser från heltalsregeln, emedan vi på denna väg kunna få någon inblick i atomkärnans struktur.

De heltal, som i de tidigare arbetena angivits såsom isotopernas massor i skalan $0 = 16$, äro enligt detta arbetes resultat icke längre att betrakta som sådana; de betecknas nu som massnummer. Det bästa uttrycket på atomens avvikelse från heltalsregeln är differensen mellan dess massa och massnumret, dividerad med massnumret. Detta tal anger den genomsnittliga vinsten eller förlusten i massa per proton, då kärnans struktur ändras från syrekärnans till atomkärnans i fråga, eftersom syret sättes exakt $= 16$ och

dess kärnstruktur således tages till »noll»-struktur. Aston betecknar detta uttryck som »packing fraction», på svenska möjligen packningseffekt och anger det multiplicerat med 10 000. Om således packningseffekten för Li^7 är $+17{,}0$, så är massan av $Li^7 = 7 + 7 \times 17 \times 10^{-4} = 7{,}012$ o. s. v.

Syftet med Astons senaste arbete har som nämnts varit dubbelt, dels att klargöra några hittills oavgjorda frågor rörande vissa elements isotopi, dels att bestämma avvikelserna från heltalsregeln. Resultaten av den förstnämnda undersökningen föreligga i tab. 1.

Tabell 1.

Element	Atomnummer	Atomvikt	Minsta antal isotoper	Massnummer, ordnade efter intensitet
S	16	32,06	3	32, 33, 34
Sn	50	118,70	11	120, 118, 116, 124, 119, 117, 122, 121, 112, 114, 115
Xe	54	130,2	9	129, 132, 131, 134, 136, 128, 130, 126, 124
Hg	80	200,6	6	202, 200, 199, 198, 201, 204

Denna tabell ger tillsammans med Astons 1925 publicerade förteckning den fullständiga listan över ej radioaktiva isotoper (avtryckt i denna tidskrifts junihäfte 1928 i en uppsats av F. Gunneson och H. Khennet).

Tab. 2 ger resultaten av precisionsmätningarna (några utförda av Costa).

Till atomernas två fundamentala konstanter, atomnummer och massnummer, som bestämma antalet protoner och elektroner i atomkärnan, kommer nu som tredje fundamental konstant packningseffekten, som är ett mått på de krafter, som sammanbinda protoner och elektroner i kärnan. Betydelsen av denna storhet framgår av följande exempel. Om packningseffekten för helium ej vore större än för syre, skulle det senares kärna vara uppbyggd av fyra oförändrade heliumkärnor eller α-partiklar utan

Tabell 2.

Atom	Packningseffekt $\times 10^4$	Massa 0 = 16	Atom	Packningseffekt $\times 10^4$	Massa 0 = 16
H	$77{,}8 \pm 1{,}5$	1,00778	Cl^{37}	$-5{,}0 \pm 1{,}5$	36,980
He	$5{,}4 \pm 1$	4,00216	A^{40}	$-7{,}2 \pm 1$	39,971
Li^6	$20{,}0 \pm 3$	6,012	As	$-8{,}8 \pm 1{,}5$	74,934
Li^7	$17{,}0 \pm 3$	7,012	Kr^{78}	$-9{,}4 \pm 2$	77,926
B^{10}	$13{,}5 \pm 1{,}5$	10,0135	Br^{79}	$-9{,}0 \pm 1{,}5$	78,929
B^{11}	$10{,}0 \pm 1{,}5$	11,0110	Kr^{80}	$-9{,}1 \pm 2$	79,926
C	$3{,}0 \pm 1$	12,0036	Kr^{81}	$-8{,}6 \pm 1{,}5$	80,926
N	$5{,}7 \pm 2$	14,008	Kr^{82}	$-8{,}8 \pm 1{,}5$	81,927
O	0,0	16,0000	Kr^{83}	$-8{,}7 \pm 1{,}5$	82,927
F	$0{,}0 \pm 1$	19,0000	Kr^{84}	$-8{,}5 \pm 1{,}5$	83,928
Ne^{20}	$0{,}2 \pm 1$	20,0004	Kr^{86}	$-8{,}2 \pm 1{,}5$	85,929
Ne^{22}	(2,2 ?	22,0048)	J	$-5{,}3 \pm 2$	126,932
P	$-5{,}6 \pm 1{,}5$	30,9825	Sn^{120}	$-7{,}3 \pm 2$	119,912
Cl^{35}	$-4{,}8 \pm 1{,}5$	34,983	Xe^{134}	$-5{,}3 \pm 2$	133,929
A^{36}	$-6{,}6 \pm 1{,}5$	35,976	Hg^{200}	$+0{,}8 \pm 2$	200,016

energiförlust, eftersom utan massdefekt. Den energiförlust, som man måste förutsätta, har således sin motsvarighet i den faktiskt funna massdefekten. Stor packningseffekt (i skalan syre = 0) betyder således lös bindning och ringa stabilitet, liten packningseffekt motsatsen.

Avsätter man packningseffekterna mot massnumren i ett diagram, erhåller man fig. 2 och 3, av vilka fig. 3 är den vänstra delen av fig. 2 i större skala. Det råder ett tydligt samband mellan dessa båda storheter. Alla element utom de lätta med jämna atomnummer ligga på en osökt dragen kurva. Från väte med stor packningseffekt faller kurvan hastigt, passerar 0 vid massnummer 20, har ett minimivärde av ungefär — 9 vid massnummer 80, stiger långsamt och skär 0-abskissan vid ungefär 200. Någon periodicitet kan icke påvisas.

Intressant är de lätta elementens förhållande. Astons och andras tidigare undersökningar ha ådagalagt en bestämd skillnad mellan element med udda och jämna atomnummer i fråga om antal isotoper och relativ förekomst på jorden.

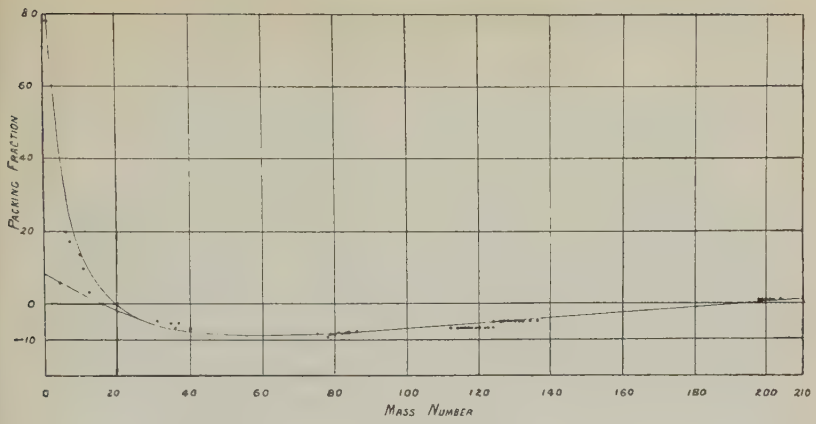


Fig. 2.

Denna olikhet återspeglas i atomkärnornas förhållande vid beskjutning med α-partiklar; enligt RUTHERFORD och CHADWICK hava element med udda atomnummer mindre

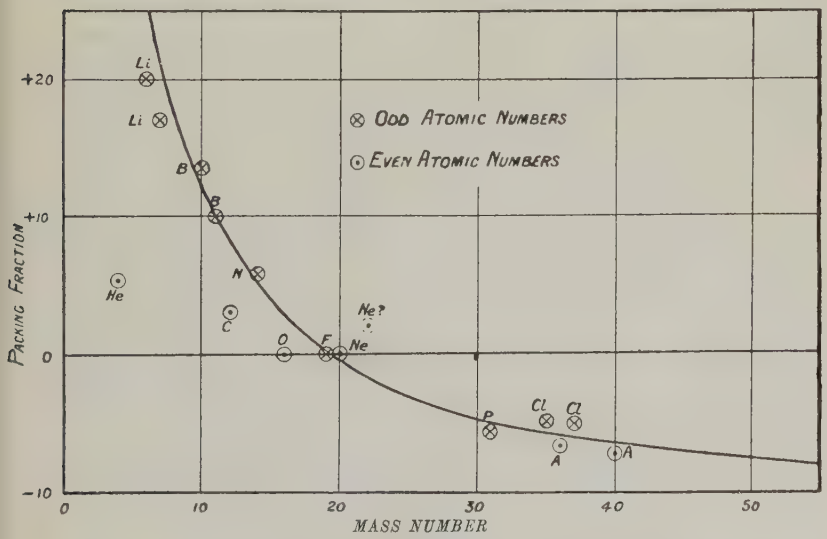


Fig. 3.

stabilitet och utsända protoner med större hastighet än element med jämna atomnummer. Den återspeglas också enligt ASTON av en skillnad i packningseffekt; atomer med udda

atomnummer ligga, oberoende av massnumren, på en kurva, som hastigt stiger upp till väte, medan de jämna numren ligga under denna kurva och bilda en kurvgren, som mindre brant stiger till helium. Aston framhåller, att hans resultat synas stödja Rutherfords åsikt, att kol och syre ej kunna splittras vid beskjutning med α-partiklar. Det jämna förloppet av kurvan i fig. 3 utan antydan till periodicitet talar för att atomkärnan icke är någon avbild av atomen i dess helhet, vilket skulle medföra periodiska egenskaper. I stället skulle den, så som Rutherford tidigare gjort gällande, bestå av en inre del med likformig, tät, »kristallinisk» struktur, omgiven av ett lösare system av protoner, elektroner och deras förening neutroner.

Astons arbete med den nya mass-spektrografen är icke avslutat; det kommer med säkerhet att lämna mycket viktiga bidrag till kännedomen om atomernas inre.

Bestämning av isens smältvärme.

Av C. U. LING.

Nedan beskrivna metod att bestämma isens smältvärme leder till synnerligen enkla räkningar och lämpar sig därför för lågstadiet och särskilt för elevlaborationerna. Den vanliga kalorimetern användes som iskalorimeter på följande sätt.

Det inre kalorimeterkärlet fylles till ungefär $^2/_3$ med tämligen stora isbitar och sättes ned i skyddskärlet. En lämplig mängd vatten av rumstemperatur (ev. varmare) väges upp i en tarerad glasbägare och dess temperatur bestämmes. Detta vatten hälles ner i kalorimetern, dock först sedan denna tömts på det smältvatten, som bildats under vägningen och temperaturbestämningen; härvid hindrar man isbitarna att medfölja med hjälp av en papp- eller metallskiva. Isen och vattnet omröras, tills temperaturen sjunkit till 0°, vilket sker efter någon minut. Allt vattnet avhälles nu i samma bägare, som förut använts, varvid isbitarna hindras medfölja på sätt, som förut beskrivits, och slutligen bestämmes vattnets vikt.

Ex. (se tab.). Vattnets vikt = 100 g, temp. = 30°; förbrukat värme alltså = 3 000 gcal. Vattnets + smältvattnets vikt = 137,8 g; den smälta isens vikt alltså = 37,8 g. Isens smältvärme = 3 000 : 37,8 = 79,4 gcal.

Nedanstående sex bestämningar, gjorda under loppet av 45 min., visa metodens användbarhet.

Vattnets vikt	temp.	Smältvattnets (isens) vikt	Isens smältvärme
100 g	30°	37,8 g	79,4 gcal
100 »	16,1	19,8 »	81,3 »
100 »	15,8	19,5 »	81,0 »
100 »	15,7	19,8 »	79,3 »
150 »	16,0	30,2 »	79,5 »
150 »	15,9	29,5 »	80,8 »

Den här beskrivna metoden innesluter tydligtvis felkällor, av vilka flera dock lätt kunna elimineras. Svårast att få riktigt är smältvattnets mängd, då den mycket beror på, hur mycket vatten som häftar vid isstyckena och kalorimeterns väggar, men även denna felmöjlighet reduceras i viss mån, om de båda omtalade tömningarna av kalorimetern utföras med såvitt möjligt lika stor grad av noggrannhet.

Insänd litteratur.

J. F. Nordvall, *Lärobok i kemi* (se sid. 105).
P. Nylén och N. Wigren, *Elementära kemiska räkneuppgifter* (se sid. 106).
Bengt E. Nyström och Hjalmar Olson, *Funktionslära och analytisk geometri* (se sid. 100).
J. S. Hedström och Einar Öije, *Aritmetik och ekvationslära* (se sid. 101).
Meddelande om ny materiell, Norstedt & Söner (se sid. 98).
Anton Sörlin, *Kautschuken, dess odling etc.* (se sid. 108).
Edvin Brandt, *Silket som natur- och konstprodukt* (se sid. 108).
Sven Sjöberg, *Signaler i samfärdselns tjänst* (se sid. 108).
Tidens kalender 1929 (se sid. 109).
Max Grenander, *Ur fysikens historia* (se sid. 107).
J. Körner, *Sveriges Elektricitetsverksindustri*, utg. av Svenska Elektricitetsverksföreningen, Stockholm 1928, C. E. Fritzes bokh. i distrib., 160 sid., häft. kr. 5: —.
N. V. E. Nordenmark, *Stjärnklara kvällar*. Albert Bonniers förlag, Stockholm 1928, 92 sid., häft. kr. 2: 50.
A. G. Högbom, *Slagrutor och rutgängeri förr och nu* (Verdandis småskrifter). Albert Bonnier 1928, 102 sid., häft. kr. 1: —.
L. P. Madsen, *Matematikken i den svenske Skole*. Særtryck af Matematisk Tidsskrift, A N:r 2, 1928.
Svensk skolfilm och bildningsfilm, 1928, häft. 9—11.
Pedagogisk Tidskrift, 1928, häft. 6—8.
Gustav Eriksson, *Lärobok i sannolikhetskalkyl* för läroverken. Almqvist o. Wicksells Boktryckeri, 1928 (i distrib.), 30 sid., häft. 85 öre.
O. Luplau Janssen, *Er Stjernerne beboet?* Gyldendalske Boghandel, København 1928, 208 sid., häft.
Het onderwijs in de naturkunde aan Gymnasia, Hoogere Burgerscholen en Lyseæ, Rapport uitgebracht aan het bestuur van de Nederlandsche Naturkundige Vereeniging, Den Haag 1928, 64 sid.
Sven Em. Ohlon, *Lärobok i fysik*, förkortad uppl., II Elektricitetslära, 105 sid. Pappersb. kr. 2: 50; III Vågrörelselära, akustik och optik, 108 sid. Pappersb. kr. 2: 50. P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget) 1928.

Bokanmälningar.

WILHELM VOLKMANN, *Die Linsenoptik in der Schule. Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft*, herausgegeben von K. Metzner, Berlin, Heft. 12. 104 sid., 4:o. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1927. RM 7: 50.

Ovanstående arbete, som på flera håll i Tyskland erhållit ett varmt mottagande, erbjuder otvivelaktigt åtskilligt av intresse, vilket omedelbart bör påpekas, då referenten i väsentliga delar ej kan ansluta sig till de av förf. framlagda synpunkterna.

VOLKMANNS arbete är uppdelat i tre huvuddelar, varav den första är av rent experimentell natur och behandlar linserna, ögat och de optiska instrumenten. Den andra avdelningen är också i stor utsträckning experimentell och behandlar de s. k. linsfelen och deras eliminering, medan den tredje avdelningen behandlar den »räknande optiken».

Vad den första, rent perimentella delen angår, så är densamma genomförd med stor konsekvens, och förf giver så tydliga och överskådliga anvisningar, att var och en bör kunna upprepa försöken. Under varje uppställningsschema finnes sålunda en skala, så att man omedelbart skall kunna finna de rätta avstånden, etc. VOLKMANN eftersträvar i denna avdelning att giva en fullständig framställning av linsernas och linskombinationernas egenskaper utan att behöva tillgripa ens den enklaste formel. Framställningen är alltså rent experimentell. I samband därmed söker han undvika begreppet »virtuell bild», som han anser hava uteslutande matematiskt intresse och medföra onödig abstraktion. Som en följd härav måste han exempelvis vid en astronomisk kikare betrakta okularet och ögat som en enhet. På liknande sätt förfares även i andra fall Detta framställningssätt är originellt och kan sannolikt medföra vissa fördelar, men jag tror knappast att det är idealiskt. För egen del har jag aldrig funnit några nämnvärda svårigheter i fråga om begreppet »virtuell bild». Visserligen kan väl en mindre begåvad elev någon enstaka gång komma fram och förgäves söka uppsamla den overkliga bilden, men dylika misstag kunna aldrig helt undvikas. Fråga är väl, om för en dylik elev kombinationen okular—öga är ett mera lätthanterligt begrepp. Givet-

vis är dock förf:s experimentella anordning att vid alla instrument införa en ögonmodell — lins och skärm (= näthinnan) — av intresse och kan vara något att tänka på.

Sedan de olika optiska instrumenten blivit genomgångna, kommer förf. äntligen in på frågan om den virtuella bilden och visar experimentellt, att lika resultat i ögonmodellen erhålles, om strålarna härröra från ett *verkligt föremål* eller från en *virtuell bild*. Han vill härmed uttryckligen betona, att man främst skall rikta uppmärksamheten på karaktären — divergens etc. — hos det mot ögat infallande strålknippet. Detta synes mig väl värt att understryka.

Andra avdelningen behandlar linsfelen och deras eliminering. Även här giver förf. åtskilliga värdefulla vinkar och gör därjämte talrika små trevliga utflykter från ämnet. Vid korrektionsmetoderna för sfärisk och kromatisk aberration exempelvis erinras om principiellt likartade tillvägagångssätt inom andra områden av fysiken.

I fråga om den räknande optiken har förf. valt ett tillvägagångssätt, som i hög grad skiljer sig från det här i landet vanliga. Jag tror ej heller, att vi hava mycket att hämta ur detta kapitel. VOLKMANNs grundprincip är att uppskjuta approximationerna i det längsta. Härigenom får han generella formler, gällande för övergången vid en linsyta. Tillvägagångssättet blir ganska tidsödande och resultatet oöverskådligt. Förf. kommer ej ens fram till den enkla linsformeln.

Förf. diskuterar sedan optikens placering på skolschemat samt dess omfattning, och han kommer därvid till det resultatet, att den rent experimentella delen av linsoptiken bör genomgås på ett så tidigt stadium som möjligt, medan den matematiska delen måste förläggas till skolans högre stadier eller eventuellt till högskolorna. »Die ganze Linsenoptik», säger han, »gehört, gemessen an den Gedanken von allgemeinster Bedeutung, zu den ärmsten Gebieten der Physik und kann sich in dieser Hinsicht mit der sogenannten physikalischen Optik oder etwa mit der Mechanik oder Wärmelehre nicht messen.» Det är ej linsoptikens eget bildningsvärde utan dess stora praktiska betydelse, som betingar dess plats inom skolan. — Därutinnan tror jag nog också att vi få giva honom rätt.

Arbetet avslutas med en redogörelse för projektionsutrustningen i skolan. *Helmer Bäckström.*

Meddelande om ny materiell, häft. 5. Skolmateriellavdelningen, P. A. Nordstedt & Söner. Stockholm 1928.

Föreliggande nya häfte av »Meddelande om ny materiell» utgör ett förnyat bevis på utgivarens all honnör värda strävan att

hålla naturvetenskapens representanter à jour med in- och utländska nyheter på undervisningsmateriellens område. Häftet bör mottagas med så mycket större glädje, som det har att bjuda på värdefulla översikter och orienteringar i moderna avsnitt av fysiken.

I den första uppsatsen ger adjunkten O. ENEROTH en beskrivning på en trevligt utförd och lätthanterlig apparat för demonstration av Boyles lag. Den lämpar sig väl för laborationsövningar på skolstadiet, varom det bifogade laborationsprotokollet bär vittnesbörd. Beräknas ur tabellen produkterna av tryck och volym, fås värden, som skilja sig högst med 1 %. Ett tryckfel har insmugit sig i tabellen å sid. 4; volymen v_6 skall vara 8, ej 5 cm^3.

För olika slag av luftpumpar redogör fil. lic. E. RUDBERG. Uppsatsen utgör en instruktiv och välskriven exposé över den moderna vakuumtekniken och dess olika bärande principer. Förf. beskriver GAEDEs kolvpump, roterande pumpar (GAEDEs och CENCO HYVAC; den sistnämnda enl. recensentens erfarenhet förträfflig och väl lämpad vid demonstration av olika faser vid elektrisk urladdning i gaser) och diffusionspumpar. Förf. ställer sig riktigt nog skeptisk gentemot användningen av molekylarpumpen i skolor. Vid fysiska institutionen i Uppsala är den emellertid den enda vid röntgenarbeten använda högvakuumpumpen och har i professor SIEGBAHNs nykonstruktion nått en hög grad av fullkomning. För diffusionspumparnas verkningssätt och konstruktion redogör förf. ingående. Dessa pumpar förtjäna genom sin prisbillighet och bekväma skötsel att vinna större användning vid våra skolor. Fig. 6 har råkat bliva upp- och nedvänd, vilket torde behöva påpekas.

Samme förf. beskriver i en följande uppsats en av firman PRESSLER tillverkad fotocell och dess användbarhet för demonstration av den fotoelektriska effekten. Effektens fundamentala betydelse inom strålningsfysiken motiverar väl en kortare framställning därav å gymnasialstadiet, och de i uppsatsen omnämnda försöken äro av den art, att de utan svårighet kunna utföras.

Lektor EVA RAMSTEDT har ställt sin sakkunskap till förfogande för beskrivningar av några moderna instrumentella hjälpmedel inom radiologien. I en av uppsatserna redogöres för ett nytt universalelektroskop enligt WULF. Instrumentet har bl. a. den förtjänsten att dess känslighet kan ändras inom stora områden. Beträffande dess mångsidiga användbarhet hänvisar förf. till ett av WOLF utgivet häfte »Elektrostatische Versuche mit Anwendung des Universalelektroskops», vilket i detta sammanhang kan livligt rekommenderas.

De bägge fundamentala försök, demonstration av α-partiklarnas banor och räkning av α-partiklar, som av förf. beskrivas, äro synnerligen instruktiva och värda att visas på skolstadiet. Det första försöket kan lämpligen utföras med en av WULF enl. WILSONS bekanta princip konstruerad apparat, det senare med GEIGERS spetskammare. Förf:s redogörelse för instrumenten och försökens utförande är mycket klar och — vilket måste med tacksamhet annoteras — innehåller en mängd värdefulla detaljföreskrifter och erfarenhetsrön.

Häftet innehåller till sist beskrivning av tvenne till elektricitetsläran hörande nyheter: en termoelektromagnet och en växelströmstransformator. Bägge avse demonstration av verkningar av starka strömmar, erhållna i första fallet av ett termoelement med obetydligt motstånd, i det andra genom transformering av växelström. Som demonstrationsobjekt vid elementarundervisningen äro bägge väl lämpade.[1]

Torsten Wetterblad.

BENGT E. NYSTRÖM och HJALMAR OLSON, *Funktionslära och analytisk geometri*, Stockholm 1928, P. A. Nordstedt & Söners förlag, 228 sid., klotb. kr 6: —.

Bokens tre första kapitel äro ägnade åt analytisk geometri och behandla punkten, räta linjen och cirkeln. Så övergå författarna till funktionsläran, behandla därefter i kap. XI—XIII parabeln, ellipsen och hyperbeln i nu nämnd ordning, ägna ett kapitel åt geometriska orter och ha därmed genomgått den föreskrivna kursen på realgymnasiet. I kap. XV lämnas en redogörelse för vissa allmänna egenskaper hos andragradskurvorna och diskuteras den geometriska betydelsen av en andragradsekvation med två variabler. Kap. XVI handlar om andra koordinatsystem än det rätvinkliga, kap. XVII om differentialer och integraler, och kap. XVIII är försett med rubriken »Tillämpningar på hela kursen». Arbetet avslutas därpå med en del historiska notiser.

Lärobokens disposition synes mig vara synnerligen lämplig. Flertalet matematiklärare torde väl också, i den mån de använda läroböckerna tillåta, följa den vid sin undervisning, och för dem bör det vara en vinst att få använda en lärobok av det slag som den här föreliggande. Framställningen är i allmänhet klar, redig och riktig, och jag har blott ett par anmärkningar att framställa.

Den viktigaste av dessa är, att matematiska termer på en del

[1] Illustrationer, visande utseendet av en del av här omnämnda apparater återfinnas å firmans annonsblad i detta nummer.

ställen införas på ett sätt, som gör, att läsaren lätt halkar över deras definitioner. Någon gång är definitionen otydlig. Den enda definition man får på en »oändlighetspunkt» på en kurva, är, att $x = 0$ är en oändlighetspunkt på kurvan $y = \frac{1}{x}$. Vilket värde denna punkts y-koordinat har, nämnes ej. Skall man kunna draga en normal till x-axeln genom »oändlighetspunkten», som författarna fordra, måste punktens y-koordinat vara ändlig. Men då ligger ju punkten i fråga ej på kurvan. Den använda terminologien måste i detta fall anses vara olämplig, så mycket mer som ju i den matematiska litteraturen termen »en kurvas oändlighetspunkter» har en helt annan betydelse. Det kan ej vara riktigt att ens i en elementär lärobok ändra en terminologi, som vunnit hävd. Jag går så långt, att jag ifrågasätter, om det är lämpligt att införa »vändpunkt» som beteckning på en kurvpunkt, vilkens y-koordinat är ett maximum eller minimum, då den tyska termen »Wendepunkt» har en helt annan betydelse.

Till slut ännu ett påpekande. Om man med nödig omsorg och utförlighet använder den gamla välkända metoden att härleda avståndet från en punkt med kända koordinater till en rät linje med ekvationen under normalformen, så har man enklast och bäst bevisat, att tecknet på polynomet $Ax + By + C$ endast beror av på vilken sida om räta linjen $Ax + By + C = 0$ punkten x, y är belägen. Författarna ha ansett det nödigt att komma med ett särskilt bevis för detta påstående, vilket bevis dessutom ej är fullt riktigt.

Boken innehåller ej mindre än 721 exempel, vilka i det stora hela synas mig vara väl valda och av lämplig svårighetsgrad. Det finns dock exempel, som förefalla vara väl svåra även för begåvade lärjungar. Synnerligen lämpligt är det, att ortproblemen sparats till slutet av den avdelning av läroboken, som behandlar skolkursen i analytisk geometri.

Oaktat jag framställt en del anmärkningar mot författarnas arbete och även på en del punkter, som jag ej vidrört, skulle önska smärre ändringar, anser jag dock arbetet så förtjänstfullt, att jag varmt vill rekommendera det.

P. G. Persson.

J. S. Hedström och Einar Öije, *Aritmetik och ekvationslära.* För fyraåriga realskolor, kommunala mellanskolor och flickskolor. Albert Bonniers förlag (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1928, 169 sid., kart. kr 3:— jämte facit, 30 sid. à 25 öre. *Aritmetikkursen*, separat av samma arbete, 66 sid. jämte facit, 15 sid. à 25 öre.

K. ASPERÉN och I. DAMM, *Lärobok i räkning*, 9:e uppl. Delvis omarbetad av S. HERMANSSON, J. Beckmans förlag, Stockholm 1928. Förra delen 220 sid., klotb. kr 3:—. Senare delen 253 sid., klotb. kr 3:—.

Det har varit synnerligen intressant att samtidigt studera dessa båda arbeten, avhandlande samma kurs och dock så olika varandra.[1]

H. Ö. är avsedd för fyraåriga realskolor, kommunala mellanskolor och flickskolor, A. D. även för den femåriga realskolan, varför dess första del innehållande aritmetikkursen och i ett litet tillägg det av ekvationsläran, som bör genomgås i den fyraåriga skolans klass I, är större än motsvarande avsnitt av H. Ö. H. Ö:s aritmetikkurs utgives även i ett separat häfte. Båda böckerna ha sina exempel ordnade i grupper A och B, A avsedda för hela klassen, B som tilläggsuppgifter för de bättre eleverna eller som kompletteringsexempel vid förefallande behov. A. D. har dessutom avdelningar C med blandade uppgifter, »lämpade för mera självständigt arbete av eleverna». B- exemplen äro hos A. D. ej försedda med facit, en anordning, som omarbetaren bibehållit från gamla A. D., men vars lämplighet anmälaren för sin del har svårt att inse. Just vid arbete på egen hand bör väl eleven uppmuntras med att få veta, att han har rätt. Vore det ej lämpligare att rubricera både B- och C-exemplen på samma sätt och lämna facit till dem alla?

A. D. är ju av gammalt känd som en originell bok med en mångfald goda uppslag, och med alla sina illustrationer och sina många roliga exempel borde den i hög grad kunna intressera eleverna, särskilt om läraren arbetar i författarnas anda. Man kan få lära sig mer än blott matematik i denna verkligt intressanta bok. Den nu föreliggande, med hänsyn till nya kursplaner nödvändiga omarbetningen är, såvitt anmälaren kunnat finna, mycket lyckligt gjord. Dock ställer jag mig litet betänksam inför omfånget, särskilt av del I. Även i den femåriga skoltypen torde den bli svår att medhinna, och i den fyraåriga kommer det nog att kosta en del möda för läraren att bestämma, vad han vill läsa och vad han måste lämna.

En och annan liten ålderdomlighet har i omarbetningen fått stå kvar: uttrycket »trefalden av» är väl numera moget att få stå inom parentes, och att tennis är ett engelskt bollspel, är kanske en onödig upplysning. Men sådant är ju oväsentligt.

H. Ö. är jämfört med A. D. en lärobok av mera vanlig typ. Den innehåller alla de kapitel, som böra finnas, och fullt upp

[1] Det förra av dessa arbeten benämnes i det följande H. Ö., det senare A. D.

med goda exempel på dem alla. Mot de föreslagna metoderna vill undertecknad på ett par ställen anmäla en avvikande mening. Att uträkna $4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 12}$ tycks mig onödigt, då $\frac{4 \cdot 5}{12}$ är lika enkelt att fatta. Likaså har uppställningen $3\frac{5}{9} : 4 = \frac{32 \cdot 1}{9 \cdot 4}$ knappast någon fördel framför $\frac{32}{9 \cdot 4}$. Att då det gäller bestämma, hur mycket tyg av 110 cm bredd som motsvarar $3\frac{2}{3}$ m av 80 cm bredd, först uträkna, hur mycket tyg, som erfordras, *om det vore 1 cm brett*, bör väl även på eleverna verka litet underligt. Det naturliga är väl att först beräkna ytan, som i bägge fallen bör vara densamma.

Då eleverna första gången göra bekantskap med ekvationer, brukar man väl numera lösa åtminstone de enklaste typerna med aritmetiskt resonemang. I H. Ö. tror man också, då man läser de fyra första sidorna om ekvationer (67—70), att detta är författarnas mening, men på den femte möter man uppställningen:

$$\begin{aligned} 7x - 11 &= 17 \\ +\,11 &= +\,11 \\ 7x &= 28 \end{aligned}$$

Detta är väl i alla fall onödigt, t. o. m. om man icke odlar det aritmetiska resonemanget. Att öka båda leden med 11 bör väl kunna ske som huvudräkning. Även i A. D. tycker jag man möter principen att behandla båda leden lika (enligt axiomen) för tidigt. Att, om $2x = 12$, x måste vara 6, torde eleven kunna klara ut utan att behöva säga, att båda leden divideras med 2. Även det »matematiska ögonmåttet», om uttrycket tillåtes, bör väl odlas.

Den största och enligt min mening mycket betydelsefulla olikheten mellan de båda böckerna finner man på sifferkritikens område. I H. Ö. förekommer uppgiften (161) »En åker är 310,2 m lång och 112,2 m bred. Vilket är dess pris efter 50 öre per m^2?» Svaret anges i facit till 17 402,22 kr, en noggrannhet som ju är illusorisk i betraktande av att de angivna längderna ej gärna kunna vara exakta tal. Det borde anges som 17 400 kr möjligen med det nu angivna värdet inom parentes Överhuvud finns i hela denna bok, såvitt anmälaren kunnat finna, ingen som helst uppgift om hur många siffror, som böra medtagas i ett svar (med undantag av upplysningen, att om ett tal är angivet i kronor, bör man bara ha 2 decimaler). Särskilt nu, då

den nya kursplanen upptager laborationer, där man skall syssla med längd-, volym- och viktbestämningar, bör väl antalet gällande siffror icke vara ett främmande begrepp för en lärjunge — eller en lärobok. I A. D. har omarbetaren ytterligare utvecklat det goda, som boken redan förut i den vägen innehöll. Se den alldeles utmärkta § 26 i första delen, där särskilt synpunkten, att det är antalet gällande siffror, ej antalet decimaler, frågan gäller, riktigt framhålles. Vi ha nog litet var syndat på denna punkt åtminstone i realskolan och kanske t. o. m. på gymnasiet, men lika viktigt, som det är att lära eleverna att räkna rätt lika viktigt borde det vara att lära dem att se litet kritiskt på erhållna resultat. Jag har en gång i en provräkning i realskoleexamen (v. t. 1911) sett en lärjunge angiva avståndet mellan Falun och Karlskrona till 496,340963 km. Ett dylikt svar skulle aldrig kunna levereras av den, som läst A. D. — men väl av den som läst H. Ö. utan att ha fått saken särskilt utredd och betonad av läraren.

I samma stil gå också de båda böckernas behandling av sifferberäkning av kvadratrötter. Interpolationsförfarandet finns omnämnt men ej beskrivet hos H. Ö.; hos A. D. finns en utförlig beskrivning. H. Ö. beräknar (se ex. 1001) kvadratrötter så, att kvadratiska faktorer först brytas ut, utan att felgränsen diskuteras. A. D. diskuterar olika förfaringssätt med angivande av felgränsen för de olika fallen. Det enda jag vill anmärka mot A. D. i detta hänseende är, att boken ej förutsätter en tabell upptagande kvadratrötter ur talen 0,1—99,9. Sådana finnas dock, och då slipper man interpolera alls, då det gäller $\sqrt{67{,}9}$ och slipper interpolera för mer än en siffra, då det gäller $\sqrt{87.27}$. Jag beundrar gärna fyndigheten i tillvägagångssättet $17\sqrt{5} = 10\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = \sqrt{500} + \sqrt{245}$, men tiden i sista klassen är kort och kan behövas till annat.

Priset på A. D kan ju synas högt, 3 kr per del, men man får verkligen valuta därför. H. Ö. är ju billigare (3 kr), men att facit icke ingår i detta pris utan betalas med 25 öre extra kommer nog icke att senteras av köparna.

De här framförda anmärkningarna avse icke att förringa böckernas påtagliga förtjänster. A. D. borde beskäras litet mera, H. Ö. borde ta upp ett kapitel (eller spridda anmärkningar) om antalet gällande siffror i ett resultat. (Några planimetriska och stereometriska figurer skulle heller ej skada!) Sedan har jag intet emot att använda vilken som helst av dessa böcker, vem jag nu än må föredraga. *Bengt E. Nyström.*

J. F. NORDWALL, *Lärobok i kemi* för folkskoleseminarier, folkhögskolor och andra ungdomsskolor samt studiecirklar. Lindblads förlag. 1928. 216 sid.

Det var en gång för några år sedan i Uppsala av K. Skolöverstyrelsen anordnad en sommarkurs för kemilärare, vari bland andra deltog förf. till ovannämnda lärobok. En eftermiddag föranstaltades då en diskussion bland deltagarna och ledarna rörande lämpligaste grupperingen av kemiläroböckernas innehåll, varvid denne i ett längre anförande pläderade för en historisk anordning av stoffet samt ett utgående ej från vissa kemiskt viktiga grundämnen, utan från stenar och andra naturföremål. Hans förslag rönte emellertid ingen anklang, utan utsattes för en nedgörande kritik från även det mest kompetenta håll.

Icke desto mindre har han emellertid i sin nu utsända lärobok i kemi fullföljt sina nyssnämnda intentioner. Framställningen innehåller sex avdelningar. I den första behandlar han ämnena i berggrunden, metaller och några av dessas föreningar. I den andra avdelningen redogöres för lutämnen, syror och baser, i den tredje omtalas luften, vattnet och förbränningen, i den fjärde oorganisk kemi, i den femte organisk kemi samt i den sjätte radiokemi och atomfysik.

Trots bokens goda utstyrsel, klara illustrationer och formellt välskrivna framställning tycker man sig förflyttad ett sekel tillbaka i tiden, då man börjar bläddra däri. Man ser för sig t. ex. *Scheffers Chemiske Föreläsningar* av år 1796, då man sida efter sida finner uttryck sådana som: svart kopparaska, röd kopparaska, gul blyaska, röd blyaska, järn + blå vitriol = = koppar + grön vitriol, järnvitriol = vatten + svavlets förbränningsgas + vit sur rök + rödfärg. kalksten + saltsyra = = eldsläckande gas + sönderflytande salt, »ur kvicksilveraska, vilken innehåller löst bunden eldsluft, kan denna frigöras genom askans upphettning. Så erhålles ren eldsluft». Ända inemot bokens mitt fortsätter förf. med dessa uttryck, som ingen kemist längre använder, allra minst i en lärobok av år 1928.

Förf. menar tydligen, att liksom människan under fosterstadiet hastigt genomlöper för länge sedan svunna utvecklingsskeden av rasens uppkomst, så måste en seminarieelev eller annan studerande, som vill erhålla kemiska kunskaper, genomgå stora delar av kemiens historiska utveckling Och han citerar WILH. OSTWALD som stöd för denna sin åsikt Den store mångfrestaren i all ära — ehuru han nog slog över betänkligt i sina filosofiska åsikter — men ingalunda är detta nutidens princip. Det finnes andra sätt att t. ex. lära sig begripa en bil-

motor än att studera dess historiska utveckling. Förf. hade vunnit mycken tid genom att föra läsaren direkt in i den nutida terminologien i stället för att tala om »hedningagläster» och »eldsläckande gas».

Efter denna enligt anmälarens mening misslyckade första tredjedel av boken följer en framställning av bättre och modernare art. »Eldsluften» utbytes mot syre, vätgas och vatten behandlas, oxider, sulfider, atomer, molekyler och kemiska tecken införas, baser, syror och salter beskrivas, och jonteoriens grunder meddelas. Den organiska kemien behandlas enligt vedertaget sätt på ett trettiotal sidor, och ungefär lika stort utrymme anslås åt en livfull och citatbemängd framställning av radiokemien och atomfysiken.

Såsom intressant läsebok i en studiecirkel eller folkhögskola synes boken kunna rekommenderas. Som verklig lärobok i kemi för t. ex. folkskoleseminarierna synes den däremot väl löslig i framställningen. *E. Nordefeldt.*

P. Nylen och N. Wigren, *Elementära kemiska räkneuppgifter med svar och anvisningar.* Almqvist & Wicksell 1928. 168 sid. och 1 logaritmtabell. Inb kr 4:50.

Samlingen upptager 424 räkneuppgifter, fördelade på 16 kapitel. Varje kapitel inledes av en kort teoretisk handledning och lösningar av några typiska uppgifter. Många problem, särskilt bland de fysikaliskt-kemiska, äro i facit utförligt behandlade.

Exempelsamlingen är av förf. avsedd framför allt för det nya realgymnasiet och upptager i överensstämmelse därmed uppgifter inom de enklare områdena av kemien, därjämte för fackskolornas behov termokemi och gasanalys. Problemen äro väl valda och så omväxlande man kan begära; till sin svårighetsgrad ligga de nog i många fall i överkant av vad skolan även efter »kemikursens fördjupande» kan fordra av sina elever. Men kemiläraren har behov även av något svårare problem, så mycket hellre, när den ökade svårigheten medför större kontakt med verkligheten, än fallet är med nu brukliga, något schematiska uppgifter. I detta hänseende fyller den föreliggande samlingen alla rimliga anspråk. Men förf. böra icke göra sig för stora illusioner i avseende på den tid, som i skolan kan anslås till problemlösning Denna får ej bli självändamål, utan måste föregås av områdets experimentella och teoretiska genomgång. Men skolan är ännu långtifrån att meddela samlade kunskaper i elementaranalys eller titreranalys eller massverkans lag. Om i en framtid lärjungarna mer än hittills få ägna sig

åt självständigt, kvantitativt arbete, blir denna exempelsamling säkert ett gott stöd vid deras beräkningar av sina försök. För lärare, som önska förelägga sina elever verklighetspräglade problem av något större svårighetsgrad än vanligt, erbjuder arbetet en god källa att med urskillning ösa ur; ännu lämpligare synes det mig vara för hög- och fackskolornas nybörjare i kemi, för vilka det torde räcka ett gott stycke framåt.

Med undertryckande av några meningsskiljaktigheter i fråga om smärre detaljer må här uppmärksamheten riktas på de mycket förtjänstfulla, välskrivna inledningarna till varje kapitel. Särskilt gäller detta omdöme kapitlen Gaslagarna och Osmotiskt tryck, där förf. med framgång »givit en för räknetekniska behov mer lämpad framställning än den, som finnes i gängse läroböcker». *G. S.*

MAX GRENANDER, *Ur fysikens historia.* Wahlström och Widstrand, Stockholm 1928, 168 sid., häft. kr 3:50.

Med dessa blad ur fysikens historia vill förf. låta läsaren erfara något om hur vetenskapsmannen i svunnen tid mödosamt och långsamt lagt den grund på vilken en senare tid kunnat bygga vidare. Såsom ämne för framställningen har valts termometerns historia, »vårt kanske populäraste fysikaliska instrument».

Genom utförliga citat få forskarna själva tala till läsaren, och förf. inskränker sig merendels till att genom kortare kommentar söka sammanhålla det hela, en långtifrån lätt uppgift, som ej alltid lösts fullt lyckligt. Lekmannen har nog här och där rätt svårt att fasthålla den röda tråden bland de många och långa citaten. Men många värdefulla inblickar givas onekligen, och även fysikern har åtskilligt av historiskt intresse att hämta därur.

Det hade ej skadat, om förf. hänvisat den läsare, vars intresse han väckt genom sin skildring, till ett mera djupgående arbete, såsom E. MACH, *Die Principien der Wärmelehre.* Anmälaren måste söka upp denna utmärkta bok för att få klarhet i några frågor, där förf:s framställning lämnar läsaren i sticket, t. ex. i fråga om IRVINEs rätt så intressanta åsikter om smältvärmet och absoluta nollpunkten (sid. 93). Anmälaren vill för sin del sätta ett frågetecken för den tolkning av begreppet värmekapacitet, som här ges. I alla händelser borde den nutida betydelsen av detta begrepp ha omtalats.

Boken avslutas med ett läsvärt kapitel om solens värmehushållning. *C. E. B.*

ANTON SÖRLIN, *Kautschuken, dess odling, användning och kommersiella betydelse.* (I serien Teori och teknik), Hugo Geber 1928. 160 sid., häft. kr 3:50.

En svensk monografi om kautschuk har hittills saknats, och detta arbete fyller såtillvida en lucka, ty var och en bör veta något om detta ämne, som ingen kan undvara; dessutom hava vi i Sverige en icke obetydlig kautschukindustri, varjämte utsikter synas föreligga för upptagande av svensk kautschukodling i Ostindien. Förf. skildrar kautschukens historia, utvinnandet av vildkautschuk, det dramatiska utsmugglandet från Brasilien av Heveafrön, liktydigt med kautschukplantagernas födelse, kautschukodlingens barnsjukdomar och deras lyckliga övervinnande. Därpå följer en — kanske väl brett hållen — redogörelse för de olika kautschuklevererande växterna, arbetet på en plantage, kautschukens vidare bearbetning, statistik m. m.

Förf:s intresse synes vara något botaniskt inriktat; en kemist eller tekniker skulle nog önska mera detaljer om råkautschukens bearbetning, vidare om den syntetiska kautschuken, som behandlas ganska knapphändigt. Det hade varit lämpligt att låta en kemist genomläsa manuskriptet och undanröja en del besynnerligheter. Språket är icke så vårdat, som vore att önska. Trots brister, som torde vara lätta att avhjälpa i en ny upplaga, hälsa vi arbetet välkommet som det första i sitt slag och väl värt att rekommendera, särskilt för lärjungebiblioteken.

EDVIN BRANDT, *Silket som natur- och konstprodukt.* (I serien Teori och teknik), Hugo Geber 1928, 196 sid., häft. kr 4:25.

Tyngdpunkten i detta arbete ligger i redogörelsen för den sentida, men redan oumbärliga textilfiber, som kallas konstsilke, men även dess föregångare, natursilket, ägnas inledningsvis en rätt utförlig framställning. Beskrivningen av konstsilkets fabrikation och användning har alla utsikter att fånga läsarens intresse; dels är ämnet aktuellt, dels är förf. tydligen fackman på området med förmåga att ge en klart disponerad, lättfattlig och sakkunnig framställning av sitt ämne. Av särskilt intresse är det korta kapitlet om stapelfibergarn, d. v. s. konstsilke, avskuret till fibrer av ull- eller bomullsfiberns längd. Införandet härav anses komma att revolutionera konstsilkeindustrien genom förenkling, förbilligande och ökade användningsmöjligheter.

SVEN SJÖBERG, *Signaler i samfärdselns tjänst.* (I serien Teori och teknik), Hugo Geber 1928, 234 sid., häft. kr 4 50.

Huvudintresset knyter sig till kapitlet »*Sjömärken och fyrar*, där läsaren får följa utvecklingen av fyrapparater och belys-

ningsmedel alltifrån den primitiva stockelden fram till våra dagars fulländade AGA-fyrar. Man får en livlig föreställning om den snabba utvecklingen på detta område, då man erfar, att inloppet till Göteborg först 1841 utmärktes med en fyr och att Holmögadd ännu så sent som 1837 vägledde den sjöfarande med skenet från en öppen stockeldsbrasa. AGA-fyrarna skildras utförligt: gasblandare, klippapparat, solventil, hur gasen driver hela det roterande optiska systemet, och hur söndriga glödnät automatiskt utbytas mot nya. Läsaren får även stifta bekantskap med det nyaste på sjösignalernas område, *radiofyrar* och apparater för *undervattenssignalering*.

Man läser knappast med samma intresse och behållning det andra huvudkapitlet, »*Järnvägssignaler*», där man gärna tappar bort sig i de många detaljerna. Ett par mindre kapitel, avhandlande de aktuella spörsmålen om *trafiksignaler* i stad och på land, avsluta framställningen. — Åtskilliga illustrationer skulle icke-fackmannen ha haft mera glädje av, om de återgivits i större skala och schematiserats något.

Tidens kalender 1929. Tidens förlag, Stockholm 1928, 294 sid., kr 2:50.

Kalendern innehåller flera statistiska upplysningar och små läsvärda artiklar, som falla inom tidskriftens intressesfär: Järnet, nutidskulturens mäktigaste hävstång (T. ODHE), Från papyrusrullen till rotationspressen (Y. HEDVALL), Belysningstekniken genom tiderna, med illustrationer ur Tekniska museets samlingar (T. ALTHIN), Elektricitet och brandsäkerhet (T. HOLMGREN). Av särskilt aktuellt intresse äro ett par orienterande, vederhäftiga uppsatser, den ena om Raketbilen och dess möjligheter (lektor E. HERLIN), den andra om Vitaminer och solljus, där förf. (fil. lic. I. BOLIN) redogör för den tyske kemistens, prof. WINDAUS, arbete på vitaminforskningens område, vilket ju i dagarna belönats med 1928 års nobelpris i kemi. Skildringen av prof W:s upptäckter framhäver på ett synnerligen lärorikt sätt den utomordentligt stora betydelsen av internationellt samarbete mellan olika vetenskapsgrenar.

Molekylviktsbestämningar enligt luftförträngningsmetoden.

I senaste numret av denna tidskrift har lektor G. STARCK recenserat min handledning i kemiska laborationsövningar. Jag får i denna recension förebråelser för att jag icke på tal om VICTOR MEYERS metod att bestämma molekylvikter har upptagit den av recensenten modifierade apparaten.

Då jag var sysselsatt med utarbetandet av detta parti av boken, tog jag även i övervägande att medtaga den STARCKska apparaten, varför jag på nytt studerade dess konstruktion i denna tidskrift och tog reda på dess pris i Graves katalog. Med anledning av de resultat jag då kom till, ansåg jag mig dock icke böra taga med ifrågavarande apparat i min handledning. Det hade då alldeles fallit ur mitt minne, att lektor STARCK sedermera högst betydligt förenklat sin apparat. I denna förenklade form vill jag gärna rekommendera apparaten, och jag beklagar, att den på grund av en lapsus från min sida saknas i min bok. Skulle emellertid min handledning få uppleva en andra upplaga, kommer jag att upptaga den STARCKska apparaten vid sidan av den ursprungliga typen. *Knut Parck.*

Gradualavhandlingar.[1]

JOSEF F. HEUBERGER, *Reaktionskinetische Studien an der spontanen Kohlensäureabspaltung der Nitroessigsäure.* Uppsala 1928, 118 sid. Disp. i Uppsala 31 mars 1928. Opponenter: Docent H. RINDE och fil. lic. R. JUNELL samt (extra) docent G. LJUNGGREN, Lund.

Nitroättiksyran, $HO \cdot CO \cdot CH_2 \cdot NO_2$, den enklaste α-substituerade nitrokarbonsyran, är förhållandevis obeständig; i vattenlösning sönderfaller den vid rumstemperatur mycket hastigt i CO_2 och $CH_3 \cdot NO_2$. Redan preparativa erfarenheter visa, att syrans sönderfallshastighet i vattenlösning är beroende av vätejonkoncentrationen. I starkt sura lösningar är sönderfallshastigheten liten, i neutral lösning är den mycket stor, i alkalisk åter liten.

Kinetiken av syrans sönderfall *i sura buffertlösningar* undersöker förf. i ett med en gasbyrett förbundet reaktionskärl; den genom sönderfallet utvecklade volymen CO_2 mätes genom kontinuerliga avläsningar å gasbyretten under reaktionens gång. Apparaturen tillåter mätningar t. o. m. i det fall, att nitroättiksyrans halveringstid är cirka 3 minuter. Reaktionsförloppet kan beskrivas genom en tidslag av första ordningen (»monomolekylar» reaktion).

För studiet av CO_2-avspaltningen *i alkaliska lösningar* utarbetar förf. en ny polarimetrisk metod. I en alkalisk tartratbuffert med vridningsmultiplikator (t. ex. molybdater) förorsakar kolsyra en betydande ändring av buffertens optiska aktivitet,

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande författares egen hand.

sannolikt beroende på bildandet av komplexer mellan kolsyran och multiplikatorn; denna vridningsändring är proportionell mot kolsyrekoncentrationen. Man kan således studera nitroacetaternas kolsyreavspaltning i sådana buffertar genom att kontinuerligt följa vridningsändringen. — För detta ändamål byggdes en polarimetertermostat.

Sönderfallshastighetens beroende av buffertarnas *pH* återgives i sura lösningar av en dissociations-, i alkaliska av en dissociationsrestkurva. Utgående från arbetshypotesen att vid karbonsyrors CO_2-avklyvning den odissocierade karboxylen är reaktionsförmedlaren, beräknar förf. ur sina kinetiska data två dissociationskonstanter för syran, $k = 3{,}54 \cdot 10^{-2}$ och $k_2 = 2{,}82 \cdot 10^{-9}$ (25°), av vilka k hänföres till den äkta nitroättiksyran, k_2 till *aci*-nitroättiksyrans, HO · CO · CH : NOOH , andra dissociationssteg.

Alkalisalternas inflytande på reaktionshastigheten undersökes även vid mycket höga koncentrationer och visar sig vara ett typiskt fall av *positiv katjonkatalys;* alkalijonerna ordnas efter katalysverkan i den naturliga lyotropa serien, i vilken NH_4^+ står mellan K^+ och Na^+. Av sina talrika katalysförsök med neutralsalter drar förf. slutsatsen, att lösningarnas egenskaper ändras *diskontinuerligt* vid vissa saltkoncentrationer (flera sådana för varje katjon). Samma diskontinuitetskoncentrationer som vid katalysverkan kunna även spåras i variationen — med saltkoncentrationen — av lösningarnas elektriska ledningsförmåga.

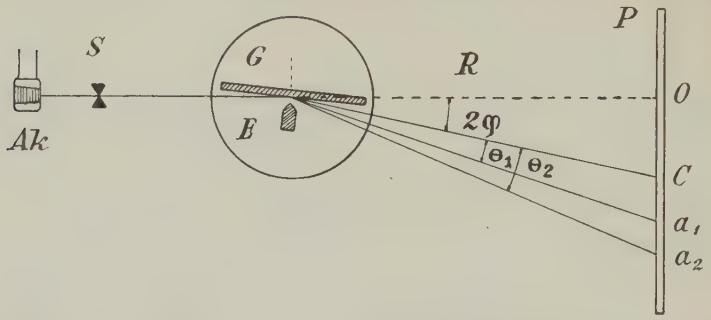
ERIK BÄCKLIN, *Absolute Wellenlängenbestimmungen der Röntgenstrahlen.* Uppsala Universitets årsskrift 1928, 79 sid. Disp. i Uppsala 26 maj 1928. Opponenter: docent A. BJÖRKESON och fil. mag. E. EKEFORS.

De med kristall utförda våglängdsmätningarna av röntgenstrålar hänföra sig till det beräknade värdet av kalkspatens gitterkonstant, $d = 3{,}02904$ Å.E. vid 18° C, vilket värde sammanfaller med det av SIEGBAHN relativt stensalt ($d = 2{,}81400$) funna. I det absoluta systemet kan felet uppgå till cirka $^1/_3$ ‰, till största delen förorsakat av osäkerheten vid bestämningen av elektronernas laddning [$e = 4.774 \times 10^{-10}$ *ESE*, MILLIKAN].

Genom att i stället för kristall använda ett vanligt optiskt plangitter under strykande incidens lyckades COMPTON och DOAN 1925 erhålla röntgenspektra, vilka, då gitterkonstanten i detta fall med stor noggrannhet kan bestämmas på optisk väg, ge våglängdsvärden i absolut mått.

Den av mig använda anordningen framgår av figuren. *Ak* är antikatoden. Strålningen passerar först den smala spalten *S* (0,03 mm) och träffar det plana glasgittret *G* (gitterkonstant *d*). *E* är en

stålegg, som är parallell med spalten S, gittrets ritsor och dess vridningsaxel. E och dess bild i gittrets plan avgränsa den effektiva gitterytan. P är den fotografiska plåten, som är vinkelrät mot det direkta strålknippet som träffar plåten i O. C är den



reflekterade strålen, α den avböjda. R är avståndet mellan plåten och centrum på den effektiva gitterytan. Med användning av figurens beteckningar erhålles för det fall att den vanliga gitterekvationen gäller:

$$\begin{cases} n\lambda = 2d \cdot \sin\dfrac{2\varphi + \Theta}{2} \cdot \sin\dfrac{\Theta}{2} \\ \operatorname{tg}(2\varphi + \Theta) = \dfrac{\overline{O\alpha}}{R}; \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{\overline{OC}}{R}. \end{cases}$$

De storheter, som måste mätas, äro: R, avstånden mellan linjerna å plåten, $O\alpha$ resp. OC, samt gitterkonstanten d; d bestämdes på optisk väg relativt den gröna *Cu*-linjen vid 5 218,20 Å.E., avstånden å plåten samt R med komparator. Glansvinkeln φ utgjorde i allmänhet 30′.

De värden, som erhöllos, ligga cirka 1,5 ‰ över de i tabellerna förekommande, med kristall uppmätta våglängderna. Det noggrannaste värdet erhölls för *AlKα*-linjen 8,333 Å E ± 1 ‰.

Med användning av detta samt av det noggrannaste kristallvärdet för samma våglängd 8,3229 Å.E. (uppmätt av A. Larsson) beräknas följande storheter:

Kalkspatkristallens gitterkonstant	$d = 3{,}033$ Å E ± 1 ‰	[3 02904 ± 0 3 ‰].
Loschmidts tal	$\lambda = 6{,}035 \times 10^{23} \pm 3$ ‰	[6,0594 ± 1 ‰].
Elektronernas laddning. . .	$e = 4{,}793 \times 10^{-10} ESE \pm 3$ ‰	[4,774 ± 1 ‰].

Inom klammer anges de för närvarande i litteraturen förekommande värdena. De av mig angivna felen äro genomsnitts-

fel. Om liknande beräkningssätt användes på det av MILLIKAN bestämda *e*-värdet, erhålles för detta ett genomsnittsfel på 2,6 ‰.

HERMAN RINDE, *The Distribution of the Sizes of Particles in Gold Sols prepared according to the Nuclear Method* Uppsala 1928, 226 sid. Disp i Uppsala 4 febr. 1928. Opponenter: docent Y. BJÖRNSTÅHL och assistent A. TISELIUS.

IVAR HERLITZ, *The dynamic Stability of long Transmission Lines* Stockholm 1928, 53 sid. Disp. vid Tekniska Högskolan 12 april 1928 Opponenter: professor HENNING PLEIJEL och lektor EINAR ZACHRISSON.

R. LUNDHOLM, *Das Rechnen mit Vektoren.* Stockholm 1928, 99 sid. Disp. vid Tekniska Högskolan 19 april 1928. Opponenter: professor EMIL ALM och civilingenjör J. WENNERBERG.

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1927—28.

K. A. WINGÅRDH, *Utvidgad kurs i differential- och integralkalkyl.* H. allm. lärov. i Falun.

N ENGELBREKTSSON, *Expansion by heat regarded as a function of the phase limit motor,* § 4—8 (§ 1—3 återfinnas i årsred. för högre allm. lärov. i Östersund 1926 - 27). Karlshamns realskola och kommunala gymnasium.

E. A. LARSSON, *Några iakttagelser beträffande strandförskjutningar genom abrasion vid Vättern mellan Vadstena och Motala.* Statens samskola i Vadstena.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årg. XL, 1928, häft. 9—10.

Ur innehållet i n:r 9: GUNNAR WODE, Några 1—2-oxidoföreningars hydrolyshastighet i sur lösning. — L RAMBERG und J. HEUBERGER, Ein Termostat für polarimetrische Arbeiten — J N. BRÖNSTED, Om sur og basisk katalyse. — H. VON EULER und EDVARD BRUNIUS, Bemerkungen über die gegenseitige Lage von Carbocyklen und Heterocyklen in organischen Molekülen. — B VON EULER und H. VON EULER, Zur kolorimetrischen Bestimmung des A-Vitamines. N:r 10. STEN TYDEN Natrolithfiltret och dess förmåga att uppmjuka hårt vatten. — C KJELLIN, referat av KURT H. MEYER, Neue Wege in der organischen

Strukturlehre und in der Erforschung hochpolymerer Verbindungen (intressant!). I båda numren: Meddelanden från Sveriges kemiska industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Utgiven av Svenska Astronomiska Sällskapet. Årg. IX, 1928, dubbelhäfte 3 och 4.

Ur innehållet: CARL STÖRMER, Problem och riktningslinjer för framtidens norrskensforskning. — KNUT LUNDMARK, Några blad ur den svenska astronomiens historia. — H. VON ZEIPEL, Den genomträngande strålningen från världsrymden. — Å. WALLENQUIST, Det nya observatoriet på Java. — Sommarens astronomkongresser. — Notiser.

Vetenskapen och livet. Årg. XII, häft. 9 o. 10. Hugo Geber. Kr. 1:25 per häfte om 48 sid.

Ur innehållet i n:r 9: Stroboskopet. — Industrien i Tyskland. — Niagaras energi. — Kolindustrien och konstgjorda gödningsmedel. Ur n:r 10: Konstsilke. — Amerikas industri. — Astrofysiken.

Era, Elektricitetens rationella användning. Årg. 1928. Häft. 9 (sept.), 10 (okt.) och 11 (nov.). Per år kr. 5:—, per häfte 50 öre.

Ur innehållet i n:r 9: Elektricitetsverkens utveckling och betydelse. — Samkörning mellan kraftverk. — Bländfri reflektorarmatur. — Modern materiel. Ur n:r 10: Svenska Elektriska Materielkontrollanstalten. — Subtraktionsmätare för belastningsreglering. — Nya normer för gummiisolerade ledningar. — Bränslekonferensen i London. Ur n:r 11: Elektrisk dränering. — Industriens motorisering. — Nya maskinnormer. — Reparation av säkerhetsproppar.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1928, 3 Hefte.

Ur innehållet i den elementära avd. **A:** L. P. MADSEN, Teori og Praksis. — Danske Eksamensopgaver. — Opgaver til Løsning. — Litteraturanmeldelser. Ur innehållet i den vetenskapliga avd. **B:** JAKOB NIELSEN, Om topologiske Afbildninger af en Jordankurve paa sig selv. — FR. FABRICIUS-BJERRE, Om de kollineationer, der fører en plan, algebraisk kurve af 3. orden over i sig selv.

Kataloger m. m.

Cenco Hyvac Pump. Denna enligt åtskilliga svenska lärares erfarenhet utmärkta roterande luftpump (0,001 mm vakuum utan förpump) beskrives i Bull. 92 från *Central Scientific Company*, 460 E. Ohio St., Chicago. Pumpen kan till fördelaktigt pris erhållas genom P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning, Stockholm; se firmans »Meddelande om ny materiell», h. 5.

Zeiss Ikon Epidiaskop. Optiska Instrument A.- B., Kungsgatan 29, Stockholm, har insänt prospekt över 1928 års modell. Detsamma återger apparatens olika detaljer, speciellt den bekväma anordningen för omkoppling från dia- till epiprojektion. Vederbörliga optiska och elektriska data angivas; apparaten kan anslutas till en vanlig 6-ampères ledning.

Universalelektromagnet *Firman Rudolph Grave*, Stockholm, meddelar, att den numera tillverkar en elektromagnet för undervisningsändamål jämte ett stort antal biapparater, vilka bekvämt och ändamålsenligt kunna apteras på densamma. Apparaterna avse demonstration av kroppars magnetiska egenskaper, elektriska strömmars förhållande till varandra, induktionsströmmars uppkomst, verkningssättet hos motorer och generatorer m. m. Elektromagneten är försedd med tre par polskor, fem ankare av olika konstruktion, Waltenhofens pendel, rör för påvisandet av polarisationsplanets vridning i lösningar, upphängningsanordning för diamagnetiska försök m. m. För förvaring av elektromagneten jämte biapparater tillhandahålles en särskilt inredd låda.

Magnet och biapparater uppvisa ej något väsentligt nytt i konstruktivt hänseende. Det har tydligen ej heller varit firmans avsikt att åstadkomma något dylikt. Den har synbarligen endast velat presentera en förbättrad, koncentrerad och bekvämt användbar apparatsamling.

Optik från Carl Zeiss. På föranstaltande av Fysiska Sällskapet i Stockholm demonstrerades vid ett par nyligen hållna sammanträden en rad av firman Zeiss förnämliga tillverkningar. Demonstrationerna åtföljdes av föredrag och experiment utförda av d:r LÖWE och herr HAUSMANN från Jena. Bland det mycknа, som därvid förekom må framhållas förevisning av en optisk bänk med en mångfald biapparater. Med hjälp av dessa demonstrerades bl. a. olika slag av spektra, natriumlågans omvändning, FRESNELs och LLOYDs interferensförsök, försök belysande ABBEs teori m. m. Genom en enkel anordning kunna behövliga appa-

rater effektivt och bekvämt fästas vid bänken så att uppställningen blir synnerligen stabil. Projektionslampan med anordning för såväl kol (matas med urverk) som glödlampa tillåter en mycket noggrann justering av ljuspunkten.

För att möjliggöra en snabb uppställning av apparaterna till ett försök levererar firman särskilda stavar — att placeras längs bänken — med utsatta märken för resp. apparatdelar, en detalj av mycket stort praktiskt värde. I en särskild handledning »Gebrauchanweisung für die Projektion optischer Versuche» lämnas försöksbeskrivningar och i ett särskilt »Kostenanschlag etc.» prisuppgifter på samtliga apparater. Av den senare framgår, att samlingen i sin helhet representerar ett rätt ansenligt kapital, men man finner åtskilliga saker till för skolor fullt överkomliga priser.

Firmans representant för Sverige — *Ingeniörsfirman Georg Schönander*, Birgerjarlsgatan 16, Stockholm — har dessutom insänt kataloger över mikroskop och apparater för mikroprojektion och mikrofotografi.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

307) Lös ekvationen

$$x^5 + 45b^4x - 54b^5 = 0.$$

C. A. Mebius.

308) Att i en given ellips inskriva en triangel med största möjliga yta, då en vinkelspets befinner sig i en given punkt på ellipsen. *C. A. Mebius.*

309) Att upprita en triangel, då man känner två sidor och den från deras gemensamma vinkelspets utgående bissektrisens lutningsvinkel mot basen. *Iter.*

310) AB, BC och CA äro tre givna linjer. Man betraktar alla cirklar, som tangera BC så, att en av dess diametrar har ena ändpunkten på AB och den andra på AC. Sök orten för cirkelns medelpunkt. *X.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

311) I en fyrhörning äro tre på varandra följande sidor a, b och c. Vinkeln mellan a och b är β och mellan b och c är den γ. Visa, att fyrhörningens yta är

$$\frac{ab\sin\beta}{2} + \frac{bc\sin\gamma}{2} - \frac{ac\sin(\beta+\gamma)}{2}.$$

312) En cirkel är given. S_n är längden av sidan hos en i cirkeln inskriven regelbunden n-hörning. Visa, att

$$S_5^2 = S_6^2 + S_{10}^2.$$

313) En rätvinklig triangel, vars kateter äro 6 och 8 dm, vrider sig 30° kring medianen mot hypotenusan. Bestäm volymen av den så uppkomna kroppen. Svar: $6{,}4\pi$ dm^3.

314) Två regelbundna pyramider ha gemensam basyta, men vända spetsarna åt olika håll. Sidoytorna i den ena pyramiden göra med basytan en vinkel $= \alpha$; i den andra pyramiden är

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

motsvarande vinkel $= \beta$. Visa, att radien i den sfär, som inskrives i dubbelpyramiden är

$$h \cdot \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}},$$

där $h =$ avståndet från basytans medelpunkt till baskanten.

315) Intill en vertikal vägg ligger en halvcylinder (radie $= r$) med sin buktiga yta uppåt och sin plana nedåt och horisontell. Ett klot lägges så, att det stöder mot väggen och mot cylinderns buktiga yta. Sök klotets radie, om trycket mot väggen skall bli så stort som möjligt. Friktionen försummas.

Svar: $\frac{5r}{7}$.

316) Konstruera uttrycket

$$\sqrt[a]{1 + \sqrt{2 - \frac{a}{b}\sqrt{3}}}.$$

Lösningar till uppg. 290, 287 a—290 a.[1]

290) *Lös ekvationssystemet:*

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{x - y + z} \cdot \sqrt{x + y - z} &= x\sqrt{yz} \\ b\sqrt{x + y - z} \cdot \sqrt{-x + y + z} &= y\sqrt{zx} \\ c\sqrt{-x + y + z} \cdot \sqrt{x - y + z} &= z\sqrt{xy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

I det följande förutsättes, att ingen av a, b, c är noll eller negativ. Man ser genast, att om en av x, y, z är noll, systemet (1) satisfieras, om de båda andra äro sinsemellan lika. Jag frånser dessa fall, som äro utan intresse, och går till det allmänna fallet. För att talen under rotmärkena skola vara positiva måste var och en av x, y, z vara positiv och mindre än summan av de båda andra. Vi kunna då konstruera en triangel, som har x, y, z till sidor; de motstående vinklarna kalla vi i samma ordning α, β, γ samt radien till den omskrivna cirkeln R.

Då är $\qquad x^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha$

$$\therefore (x + y - z)(x - y + z) = 4yz \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Genom införande härav i (1) får man, efter division med $\sqrt{yz}$:

$$x = 2a \sin \frac{\alpha}{2},$$

[1] Uppgifterna i årg. XI, h. 4 böra få numren 287 a—296 a i stället för 287—296.

varav, eftersom $x = 2R \sin \alpha$,

$$a = 2R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

På samma sätt fås formlerna för b och c. Formlerna kunna skrivas

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a \sin \frac{\alpha}{2} \\ y &= 2b \sin \frac{\beta}{2} \\ z &= 2c \sin \frac{\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2) \qquad \left.\begin{aligned} a &= 2R \sin \frac{180^\circ - \alpha}{2} \\ b &= 2R \sin \frac{180^\circ - \beta}{2} \\ c &= 2R \sin \frac{180^\circ - \gamma}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (3)$$

Summan av de tre vinklarna i (3) är tydligen 180°. Man kan alltså i cirkeln inskriva en triangel med vinklarna $\frac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\frac{180^\circ - \beta}{2}$, $\frac{180^\circ - \gamma}{2}$. Av (3) ser man genast, att dess sidor bliva a, b, c och att den är spetsvinklig. Men nu var det a, b, c som voro kända. Alltså blir lösningen följande. Med sidorna a, b, c bildas triangeln ABC och kring denna omskrives en cirkel. I cirkeln inpassas från A kordan $AD = AB = c$ åt andra hållet. Då blir $z = BD$. På samma sätt får man x och y.

Den algebraiska lösningen är också lätt funnen. Om cosinusteoremet tillämpas på triangeln med sidorna a, b, c, erhålles

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin \frac{\alpha}{2} \text{ o. s. v,}$$

varav enligt (2)

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \\ y &= b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} \\ z &= c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \end{aligned}\right\}$$

Frans de Brun.
Även löst av *X*.

287 a) *I en rätvinklig triangel bilda de vidskrivna cirklarnas radier aritmetisk serie. Angiv förhållandet mellan kateterna.*

Med sedvanliga beteckningar i $\triangle ABC$ ($\angle A$ rät) får man:

$$r_a = \frac{T}{p - a} = \frac{T}{r}; \; r_b = \frac{T}{p - b} = \frac{T}{r} \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

$$r_c = \frac{T}{p - c} = \frac{T}{r} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{T}{r} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}.$$

Insättning i sambandet $2r_b = r_a + r_c$ och division med $\frac{T}{r}$ ger

$$2 \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}$$

varur man efter förenkling får:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}} = 2 \text{ d. v. s. } \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = 2 .$$

På liknande sätt behandlas problemet, om man mellan r_a, r_b och r_c har en godtycklig lineär relation.

B—r.

Även löst av *Cevas* och *A. N. Zahl.*

288 a) *En cirkel med centrum O, punkten A och en sträcka l äro givna. Drag en korda genom A, vars projektion på linjen OA har längden l.* *X.*

Cirkelns (C_1) radie må vara r och $OA = a$ ($a > r$). Avståndet från A till mittpunkten D på den sökta kordan BC betecknas med z och vinkeln mellan OA och BC med φ. Då är $z = a \cos \varphi$, och ur $\triangle OBD$ fås $r^2 = a^2 \sin^2 \varphi + \frac{l^2}{4 \cos^2 \varphi} = a^2 - z^2 + \frac{a^2 l^2}{4 z^2}$; alltså

$$\left(\frac{z^2}{a}\right)^2 - \frac{a^2 - r^2}{a} \cdot \frac{z^2}{a} = \frac{l^2}{4} .$$

Här är $\frac{a^2 - r^2}{a} = u$ avståndet AE från A till dess tangentkorda. Man får då

$$\frac{z^2}{a} = \frac{u + \sqrt{u^2 + l^2}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

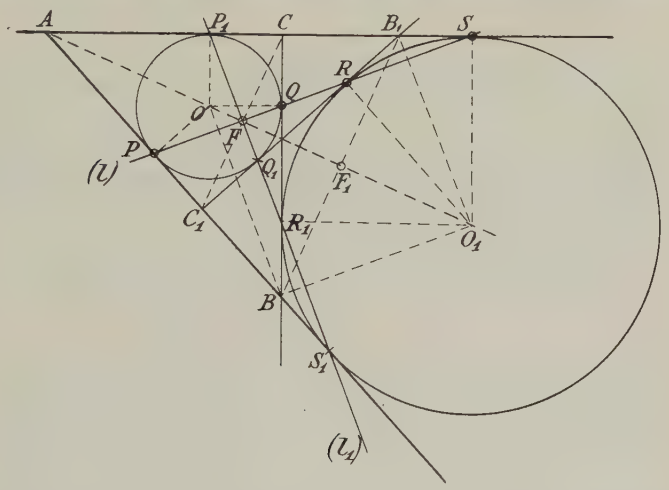
och härur följande konstruktionsmetod:

Upprita en cirkel C_2 med OA som diameter. Radikalaxeln till C_1 och C_2 skär OA i F. På radikalaxeln avsättes $EF = l$ och med A som centrum ritas en cirkel C_3 genom F. Den närmast O belägna skärningspunkten mellan C_3 och OA må vara G. Mittnormalen till EG skär C_2 i P_1 och P_2. Linjerna AP_1 och AP_2 ge då de sökta kordorna.

Om $a < r$, fås en teckenändring i (1), men metoden kan oförändrad användas. *B—r.*

289 a) *Om en inre och en yttre gemensam tangent till två cirklar äro vinkelräta mot varandra, så ligga samtliga gemensamma tangenters beröringspunkter med cirklarna på två mot varandra vinkelräta linjer, och de av cirklarna på dessa linjer avskurna kordorna äro lika stora.* *Iter.*

I vår figur är ABC den vid C rätvinkliga triangel, som bildas av två gemensamma yttre (AB och AC) samt en inre gemensam tangent



till cirklarna O och O_1; AB_1C_1 är den med avseende på OO_1 symmetriska triangel, i vilken den återstående gemensamma tangenten ingår. Med beteckningen $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1}$ angives att sträckorna MN och M_1N_1 äro lika långa, parallella och likriktade. Då gäller tydligen

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_1C} = \overrightarrow{B_1S}$$

och

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{R_1C} = \overrightarrow{O_1S}.$$

Parallellförflyttas $\triangle OQB$ den sträcka, som till storlek och riktning bestämmes av $\overrightarrow{BO_1}$, kommer den alltså att täcka den kongruenta $\triangle B_1SO_1$. Av symmetriskäl bringas på samma gång 4-hörningen $BPOQ$ att sammanfalla med O_1RB_1S. Nu är $PQ \perp BO$ och $BO \perp BO_1$ d. v. s. $PQ \parallel BO_1$. Genom förskjutning längs sin egen förlängning kan PQ alltså överföras i läget RS. Detta visar, att P, Q, R, S ligga i rät linje (l) och att $PQ = RS$. På den med l med avseende på OO_1 symmetriska l_1 ligga P_1, Q_1, R_1, S_1.

$\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C = 135^\circ$; $l \perp OB$. Alltså bildar l en vinkel på 45° med OO_1, varav följer, att $l \perp l_1$.

Anm. Det kan tilläggas, att l och l_1 råkas i skärningspunkten F mellan OO_1 och CC_1, som är den ena punktcirkeln i det av cirklarna O och O_1 bestämda (harmoniska) knippet; den andra är skärningspunkten F_1 mellan BB_1 och OO_1. F_1 ligger mittemellan O och O_1 och är följaktligen centrum till cirkeln $OCB_1O_1BC_1$.

X.

Även löst av *B—r.*

290 a) *Tre hyperbler äro upprittade, av vilka vardera tangerar en sida i en given triangel och har de båda återstående sidorna till asymptoter. Visa, att produkten av dessa hyperblars parametrar är lika med kuben på triangelns inskrivna cirkels diameter.*

Triangelns sidor m. m. betecknas på vanligt sätt; hyperblernas halvaxlar må vara a_i och b_i $(i = 1, 2, 3)$. Ur kända egenskaper hos hyperbeln fås då:

$$a_i b_i = T; \quad \frac{b_1}{a_1} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \quad \text{o. s. v.}$$

$$\frac{2b_1^2}{a_1} = 2\sqrt{\frac{Tr^3}{(p-a)^3}}$$

och parametrarnas produkt blir

$$8\sqrt{\frac{T^3 r^9}{(p-a)^3 (p-b)^3 (p-c)^3}} =$$

$$= 8\sqrt{\frac{T^6 r^6}{p^3 (p-a)^3 (p-b)^3 (p-c)^3}} = 8r^3. \quad \textit{V. S. B.}$$

B—r.

Även löst av *X* och *Iter.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna H. T. 1928.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Summan av en oändlig, konvergent geometrisk serie betecknas med s. Ur denna serie bildas en annan, som består av den andra termen och, från denna räknat, var tredje term i den ursprungliga serien (alltså de termer, som i den ursprungliga serien ha ordningsnumren 2, 5, 8, 11 o. s. v.). Denna series summa betecknas med s_1. Bestäm kvoten i den ursprungliga serien så, att
$$s = 4s_1.$$
2. I en given triangel är en sidas längd $^2/_3$ av summan av de båda andra sidornas längder. Bissektrisen till den vinkel i triangeln, som står mot den förstnämnda sidan, delar triangeln i tvenne deltrianglar, vilkas ytor förhålla sig som 4 : 1. Beräkna triangelns vinklar.
3. I en regelbunden tetraeder har kantlinjen längden a. Genom mittpunkterna av de tre kantlinjer, som utgå från ett och samma hörn, lägges ett plan. Sedan man medelst fyra dylika plan bortskurit tetraederns hörn, återstår en kropp, vars volym och yta skola beräknas.
4. I en cirkel med radien 2,5 dm är en triangel inskriven, i vilken en sida är 4 dm och en av de vid denna sida stående vinklarna 30°. Beräkna triangelns yta.
5. Medelst ekvationen
$$(y - x)^2 = y^2 - 1$$
definieras y som en funktion av x. Undersök funktionen grafiskt samt angiv den erhållna kroklinjens maximi- och minimipunkter.
6. Man har två ekvationer av andra graden. Båda ekvationernas rötter äro positiva. Den ena ekvationens rötter äro vardera tre gånger så stora som var sin av den andras. Summan av alla fyra rötterna är 4, summan av kvadraterna på deras inverterade värden är 12,5. Vilka äro ekvationerna?
7. En rak pyramid har till bas en kvadrat med sidan 70 dm.

Medelst ett plan, som är parallellt med basen och på avståndet 10 dm från denna, bortskäres pyramidens topp, så att en stympad pyramid återstår. I denna ha sidokanterna samma längd som sidan i den mindre basytan. Beräkna denna längd och vinkeln mellan ett sidoplan och ett av basplanen.

8. I en cirkel är inskriven en liksidig triangel ABC. P är en godtycklig punkt på cirkelns periferi. Visa, att en av de tre linjerna PA, PB, PC är lika med summan av de andra båda.

Resultat: **1.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **2.** 11°,72; 42°,59; 125°,69. **3.** Ytan $= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, volymen $= \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **4.** $(2\sqrt{3}+1{,}5)$ dm$^2 = 4{,}964$ dm^2; $(2\sqrt{3}-1{,}5)$ dm$^2 = 1{,}964$ dm^2. **5.** $y_{max.} = -1$ för $x = -1$; $y_{min.} = +1$ för $x = +1$ (asymptoter äro y axeln och linjen $y = \frac{x}{2}$). **6.** $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$. **7.** 30 dm; 26°,57. **8.** Använd Ptolemeiska satsen!

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Från en punkt på en cirkels periferi utgå tvenne kordor, som med varandra bilda 60° vinkel, och som ha längderna 5 cm och 8 cm. Hur lång är den korda i cirkeln, som delar vinkeln mellan nämnda kordor mitt itu?
2. Kring en ellips omskrives en kvadrat på så sätt, att en av kvadratens diagonaler faller utefter ellipsens storaxel. Var och en av kvadratens sidor delas av tangeringspunkten i tvenne delar, som förhålla sig som 1 : 2. Hur stor är ellipsens excentricitet?
3. I ett sfäriskt segment har man inskrivit ett klot, som tangerar segmentets buktiga yta i en punkt samt dess plana yta i dennas medelpunkt. Det inskrivna klotets volym är en sjättedel av segmentets volym. Beräkna förhållandet mellan det inskrivna klotets yta och segmentets totala yta.
4. Man har två aritmetiska serier A och B. För var och en av serierna gäller, att den enas differens är lika med den andras första term. Produkten av de fyra första termerna i serien A är 5 enheter större än produkten av de fyra första termerna i serien B. Vidare är kvadraten på summan av de fem första termerna i serien A 150 enheter mindre än kvadraten på summan av de fem första termerna i serien B. Bestäm alla seriepar, som ha dessa egenskaper.

5. Bestäm alla vinklar x, som satisfiera ekvationen

$$\sin 2x - \sin x + 1 - \cos x = 0.$$

6. AB och CD äro två kantlinjer i en regelbunden tetraeder, vilka icke råkas. Tetraederns kantlinje har längden a. På AB har man tagit punkten P så, att $AP = \frac{a}{3}$, och på CD punkten Q så, att $CQ = \frac{2a}{5}$. Beräkna längden av sträckan PQ.

7. I likheten

$$y = \frac{27(x+a)}{x^3+b}$$

skola konstanterna a och b bestämmas så, att följande villkor uppfyllas. Sammanlagda antalet maximi- och minimivärden hos funktionen y är 3. Ett av dessa svarar mot $x = 1$. De båda andra svara mot x-värden, vilkas produkt är $4\frac{1}{2}$. Konstruera med de mot dessa villkor svarande värdena på a och b den kurva, som representerar funktionen, och angiv speciellt maximi- och minimipunkter samt asymptoter.

8. Bevisa, att om n är ett udda, helt tal > 1,

$$n^5 - n$$

alltid är jämnt delbart med 240.

9. Två sträckor a och b äro givna ($a > b$). Upprita en rätvinklig triangel med hypotenusan $= a$ och skillnaden mellan kateterna $= b$.

Resultat: **1.** $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ cm $= 7{,}506$ cm. **2.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.** $\frac{3}{13}$.

4. Fyra seriepar A och B finnas:

$\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2} \ldots$ och $\frac{1}{2}, \frac{4}{2}, \frac{7}{2}, \frac{10}{2}, \frac{13}{2} \ldots$;

$-\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{6}{2}, -\frac{7}{2} \ldots$ och $-\frac{1}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{10}{2}, -\frac{13}{2} \ldots$;

$\frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \ldots$ och $-\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{5}{2}, \frac{8}{2}, \frac{11}{2} \ldots$;

$-\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \ldots$ och $\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{8}{2}, -\frac{11}{2} \ldots$.

5. $x_1 = n \cdot 360°$; $x_2 = 90° + n \cdot 360°$; $x_3 = -45° + n \cdot 180°$.

6. $\frac{11a}{15}$. **7.** $a = \frac{7}{3}$, $b = 9$; $y_{\max.} = 1$ för $x = -3$; $y_{\min.} = 4$ för $x = -\frac{3}{2}$; $y_{\max.} = 9$ för $x = 1$; asymptoter äro x-axeln och linjen $x + \sqrt[3]{9} = 0$. **8.** Skriv t. ex. $n^5 - n = (n-1)n(n+1)[(n+2)(n-2)+5]$ o. s. v. **9.** Algebraisk lösning eller vackrast rent geometrisk med hjälp av den kända ortsatsen för skillnaden mellan två triangelsidor; se t. ex. CASSELs geometriska anteckningar sid. 9.

Uppgifter i fysik.

1. På ett strävt lutande plan, som kan vridas kring en vågrät axel, ställes ett homogent, rakt kvadratiskt prisma med ena baskanten parallell med planets vridningsaxel. Planets lutningsvinkel är i början mycket liten men ökas så småningom, tills prismat kommer i rörelse. Hur stor bör prismats höjd minst vara i förhållande till baskanten, för att prismat, då det kommer i rörelse, skall välta och icke glida utför planet? Friktionskoefficienten är $^1/_3$.
2. En matematisk pendel består av en liten kula, som hänger i ett viktlöst snöre av 2 m längd. Kulan lyftes, så att det sträckta snöret bildar 10° vinkel med lodlinjen, och får sedan falla. Lodrätt under pendelns upphängningspunkt på ett avstånd av 1,2 m från denna finnes en horisontellt ställd egg, som är vinkelrät mot pendelns svängningsplan. När kulan hunnit till sitt nedersta läge, fortsätter den ett stycke, innan den vänder. Huru stor vinkel bildar i vändpunkten den undre delen av snöret med lodlinjen?
3. En ballong av 900 m^3 rymd är fylld med torr lysgas. Luftens temperatur är 20° C, barometerståndet är 735 mm; atmosfären innehåller vattenånga av 12 mm tryck. Trycket inuti ballongen är lika stort som barometertrycket. Huru stor är ballonggasens lyftkraft vid markens nivå? En liter torr luft väger vid 0° C och 760 mm tryck 1,293 gr. Specifika vikten i förhållande till luft av samma temperatur och tryck är för vattenånga $^5/_8$ och för lysgas $^2/_5$. Gasernas volymsutvidgningskoefficient är $^1/_{273}$.
4. Vid bestämning av ljusets hastighet med FIZEAUs anordning ökas successivt rotationshastigheten hos ett med tänder försett hjul. Vid ett visst varvantal inträder den första förmörkelsen, då de strålar, som slippa fram genom mellanrummet mellan två tänder, på återvägen hejdas av en av dessa. Ökas rotationshastigheten ännu mer, synes ljuset åter, och vid ett visst, ännu högre varvantal inträder den andra förmörkelsen. Vilket värde på ljusets hastighet erhålles, då den andra förmörkelsen inträffar vid en rotationshastighet av 30 varv per sek? Hjulet har 720 tänder, vilka äro av samma bredd som mellanrummen mellan dem; avståndet mellan hjulet och spegeln har uppmätts till 10 400 m.
5. En tunn bikonvex glaslins är helt nedsänkt i en vätska och träffas av enfärgat ljus, som infaller parallellt med linsens optiska huvudaxel. De båda radierna i linsens buktiga ytor äro 40 cm; glasets brytningsexponent är $^3/_2$, vätskans $^5/_3$.

Var ligger den punkt, från vilken strålarna synas utgå, då de genomgått linsen?

6. I ett elektricitetsverk utgöres strömkällan av ett ackumulatorbatteri, bestående av 250 element med vardera en elektromotorisk kraft av 2 volt. Från verket utgå tre ledningar till en abonnent, den första A_1A_2 från batteriets positiva pol A_1, den andra B_1B_2 från batteriets negativa pol B_1 och den tredje C_1C_2 från mittpunkten C_1 på batteriet. Punkten C_1 är avledd till jorden. Potentialen i punkterna A_1, B_1, C_1 är således resp. + 250, — 250 och 0 volt. Motståndet i kablarna A_1A_2 och B_1B_2 är vardera 1 Ω, i kabeln C_1C_2 2 Ω. Mellan punkterna A_2 och C_2 äro inkopplade parallellt 100 lampor, vardera med motståndet 1200 Ω, mellan B_2 och C_2 120 lampor av samma slag. Sök strömmens styrka och riktning i kabeln C_1C_2. Batteriets inre motstånd lämnas utan avseende. Motståndet i den ledning, som förbinder en lampa med punkten C_2 och A_2 eller B_2, beräknas ingå i det uppgivna värdet på lampans motstånd.
7. En lång solenoid är uppställd med axeln horisontell i nord—sydriktningen. Inuti solenoiden befinner sig en kort kompassnål, vars mitt sammanfaller med solenoidens. Om en elektrisk ström genomflyter denna, alstras kring kompassnålen ett homogent magnetiskt fält med horisontella kraftlinjer, riktade syd—nord eller nord—syd, beroende på strömmens riktning. Det av strömmen alstrade magnetiska fältets styrka är proportionell mot strömstyrkan. Då denna senare är 0,05 A, gör magnetnålen 50 svängningar per minut under inverkan av det magnetiska fält, som är resultanten av jordmagnetismens horisontella komposant och det av strömmen alstrade fältet. Om strömmens riktning i solenoiden omkastas och strömstyrkan fortfarande är 0,05 A, minskas nålens svängningstal till 20 per minut. I båda fallen är det resulterande horisontella fältet inuti solenoiden riktat från syd till nord. Huru stark ström skall sändas genom solenoiden, för att det resulterande horisontella magnetiska fältet i solenoidens mitt skall försvinna?
8. Redogör för en metod att bestämma våglängden för någon ljussort.

Resultat: **1.** 3 ggr baskanten. **2.** 15°,84. **3.** 622,7 kg. **4.** $299{,}5 \times 10^6$ $^{m}/_{sek.}$ **5.** 200 cm framför linsen. **6.** 2,618 A från batteriet. **7.** 0,069 A.

Realskolexamen H. T. 1928.

Provräkning.

1. Lös ekvationen:
$$2\left(0{,}5+\frac{x}{3}\right)-\frac{1-\frac{2}{15}x}{0{,}4}=0{,}5x\left(\frac{6}{x}-1\right).$$
2. Ett visst arbete kan utföras, därigenom att man dagligen använder antingen 9 män och 35 kvinnor eller 20 män och 20 kvinnor. Dagskostnaden för arbetet utgör i båda fallen 260 kronor. Alla männen hava samma dagspenning, likaså alla kvinnorna. Beräkna dagspenningen för varje man och varje kvinna.
3. Till 10 kg vatten sattes $2\frac{1}{2}$ kg salt. Hur mycket vatten skall genom destillation bortskaffas från 5 kg av denna lösning, för att man skall få en lösning med 25 % salthalt?
4. 8 st. $4\frac{1}{2}$ % obligationer å nominellt 1 000 kr vardera såldes efter 98 % kurs jämte 4 månaders upplupen ränta. Som betalning lämnades dels ett kontant belopp, dels en tre månaders växel å 4 000 kr, som omedelbart diskonterades efter 6 %. Hur stor summa lämnades kontant?
5. På en cirkels omkrets tagas i ordning fem punkter A, B, C, D och E så, att kordorna AB, BC och CD äro = cirkelns radie och att E delar bågen DA mitt itu. Bestäm vinklarna i den triangel, som har sina hörnpunkter i A, C och E.
6. På diagonalen AC i en kvadrat $ABCD$ med sidan = 7 cm avsättes ett stycke AE = kvadratens sida. E sammanbindes med B. Beräkna ytan av var och en av de trianglar, i vilken kvadraten är delad.
7. I en ångpanna är ångtrycket 5,6 kg per kvcm. Hur stort är sammanlagda trycket på ångpannans innerytor, då pannan är cylindrisk med $1\frac{1}{2}$ m inre diameter och 4 m längd? $\pi=3\frac{1}{7}$.
8. Basytan hos en pyramid är en kvadrat med 3 cm sida. Var och en av de lika långa sidokanterna är lika lång som basytans diagonal. Hur stor är pyramidens volym?

Resultat: **1.** $x=3$. **2.** Varje man 7,50 kr, varje kvinna 5,50 kr. **3.** 1 kg. **4.** 4020 kr. **5.** Vinklarna vid A, C och E äro resp. 75°, 45° och 60°. **6.** $\triangle ACD=24{,}5$ cm^2; $\triangle ABE=\frac{49\sqrt{2}}{4}$ cm^2 = $=17{,}32$ cm^2; $\triangle BCE=\frac{49(2-\sqrt{2})}{4}$ cm^2 = 7,18 cm^2. **7.** 1254 ton. **8.** $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ cm^3 = 11,02 cm^3.

Allmänna metoder vid geometriundervisningen.

Av HENRIK PETRINI.

(Forts.)

6. Snedvinkliga koordinater.

Mången anser nog, att snedvinkliga koordinater inte alls höra till skolkursen. Vore det så, att behandlingen krävde inlärandet av trassliga formler, borde naturligtvis detta kapitel ej medtagas, men nu kan införandet ske på ett sätt, som ej innebär någon utökning av kursen, utan endast ger en vidgad syn på den analytiska geometrien, och på samma gång möjliggöres en naturlig indelning av lärosatserna om andragradskurvorna.

Redan vid den första undervisningen i analytisk geometri bör man utgå från ett snedvinkligt koordinatsystem och härleda så många satser som möjligt. Sedan specialiserar man koordinatsystemet till rätvinkligt och får då fram en del satser, som ej gälla för det allmänna fallet. Vid min undervisning har jag följt denna metod vid behandlingen av den räta linjen och den allmänna andragradsekvationen.

a. *Den räta linjen.* Om man från början använder ett snedvinkligt koordinatsystem, förvånas man, hur litet man behöver jämka på lärobokens framställning (förf. har använt Collins lärobok). Formlerna, bevisen och problemen bli desamma som förut i det stora hela. Så t. ex. finner man genast, att ekvationen för en rät linje, som går genom origo, är $y = kx$, där vinkelkoefficienten k är $= \frac{y_0}{x_0}$, om punkten (x_0, y_0) ligger på linjen. Man har nu blott att akta sig för att sätta »$k = \operatorname{tg} \alpha$», en formel som ju endast gäller för ett

rätvinkligt koordinatsystem, vilket i förbigående påpekas. Att inlära uttrycket för k i ett snedvinkligt koordinatsystem är meningslöst; möjligen kan man ge deduktionen härav som uppgift i en skrivning.

Den enda allmänna teori, som behöver hänföras till en senare avdelning, behandlande enbart rätvinkliga koordinater, är läran om en rät linjes normalekvation. Härtill kommer formeln för vinkeln mellan två räta linjer och formeln för avståndet mellan två punkter. Utom dessa tre saker, som behandlas enbart med rätvinkliga koordinater, blir allt oförändrat, om man låter koordinatsystemet vara snedvinkligt. Dock får man vid beräkningen av en triangels yta in en faktor $\sin v$, där v är vinkeln mellan koordinataxlarna; eljest blir beviset även här oförändrat.

Framhållas bör, att tangentens vinkelkoefficient är lika med derivatan även i ett snedvinkligt koordinatsystem.

b. *Den allmänna andragradsekvationen.* Sedan man behandlat de koniska sektionerna med rätvinkliga koordinater, utgår man från den allmänna andragradsekvationen i rätvinkliga koordinater. Man övergår så till ett godtyckligt, snedvinkligt koordinatsystem (med samma origo) och får då mer symmetriska formler.

Bilda de nya x_1- och y_1-axlarna vinklarna α och β med x-axeln, finner man omedelbart

$$x = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta; \quad y = x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \beta.$$

Att uttrycka x_1 och y_1 i x och y är onödigt. Insättas nu de nämnda värdena på x och y i andragradsekvationen, finner man, att den nya ekvationen blir av samma form som den gamla (och omvänt).

Låter man för ett ögonblick β vara $= \alpha + 90°$, så finner man, att α kan väljas så, att koefficienten för xy-termen blir $= 0$. Härav följer, att den allmänna ekvationen endast representerar koniska sektioner och avarter därav.

Om man således utgår från den allmänna andragradsekvationen i snedvinkliga koordinater

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

så innefattar denna alla koniska sektioner. Bestämmer man på vanligt sätt villkoret för att kurvan skall ha två asymptoter, så finner man $C^2 > 4AB$. Om $C^2 < 4AB$, fås ingen asymptot, och för $C^2 = 4AB$ faller asymptoten på oändligt avstånd.

För en konisk sektion med medelpunkt kan man taga medelpunkten till origo, och då satisfieras ekvationen av $(-x, -y)$, varav fås $D=E=0$. Tagas ett par konjugatdiametrar till koordinataxlar, så satisfieras ekvationen av punkterna (x, y) och $(x, -y)$. Härav följer $C=0$; kurvans ekvation, hänförd till ett par konjugatdiametrar blir då

$$Ax^2+By^2+F=0.$$

Om $F \neq 0$, kan denna ekvation skrivas under formen

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Sättes $x=0$ resp. $y=0$, finner man, att a och b bli lika med halva konjugatdiametrarna.

Om man åter tager en punkt på andragradskurvan till origo, så blir $F=0$. Vi välja nu diametern, som går genom origo, till x-axel och till y-axel tangenten genom origo. Då vet man, att alla kordor, som äro parallella med y-axeln delas mitt itu av x-axeln. Om således punkten (x, y) ligger på kurvan, så ligger även punkten $(x, -y)$ på kurvan. Härav fås $C=0$ och $E=0$. Hänförd till en diameter som x-axel och tangenten i diameterns ena ändpunkt som y-axel, blir alltså den allmänna andragradskurvans ekvation

$$Ax^2+By^2+Dx=0.$$

För en parabel är $C^2=4AB$; $\because A \cdot B=0$. För $B=0$ fås de två parallella räta linjerna $x=0$ och $x=-\frac{D}{A}$. För $A=0$ fås $y^2=2px$, där $p=-\frac{D}{2A}$.

Hänföres hyperbeln till asymptoterna som koordinataxlar, så kommer origo i medelpunkten; $\because D=E=0$. Di-

videras ekvationens båda led med x^2, fås

$$A + B\frac{y^2}{x^2} + C\frac{y}{x} + F\frac{1}{x^2} = 0.$$

För $x = \infty$ blir $y = 0$; $\because A = 0$. På samma sätt erhålles $B = 0$. Hänförd till asymptoterna som koordinataxlar blir alltså hyperbelns ekvation $xy = -\frac{F}{C}$. Väljas axlarnas positiva riktningar så, att hyperbeln faller i första och tredje axelvinkeln, finner man omedelbart av en figur, att koordinaterna för vertex bli $\frac{c}{2}$ och $\frac{c}{2}$, $\because xy = \frac{c^2}{4}$.

Härmed har jag velat visa, huru man utan tidsödande räkningar omedelbart kan komma till åtskilliga resultat, som äro av ett visst värde, blott man från början ej gör onödiga inskränkningar i uppgifternas allmängiltighet, i detta fall med avseende på vinkeln mellan koordinataxlarna. Metoden avser att öva lärjungarna att från olika synpunkter diskutera allmänt hållna uppgifter. Härigenom införas de i ett produktivt matematiskt tänkande, och faran för att de skola drunkna i långa räkningar blir mindre.

7. Poler och polarer.

Ett annat område, som är ägnat att vidga lärjungarnas vyer och väcka intresse för allmänna matematiska metoder, är läran om poler och polarer, där man kan härleda åtskilliga satser utan några vidlyftiga räkningar.

Tangentkordans ekvation. (Fig. 16.) Om från punkten (α, β) två tangenter dragas till ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, vilka råka kurvan i punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2), så äro tangenternas ekvationer $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, $\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1$. Då punkten (α, β) ligger på dessa linjer, så fås $\frac{\alpha x_1}{a^2} + \frac{\beta y_1}{b^2} = 1$ och $\frac{\alpha x_2}{a^2} + \frac{\beta y_2}{b^2} = 1$.

Skriver man nu upp ekvationen

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

så satisfieras den alltså av värdena (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Då den dessutom är av första graden, så representerar den en rät linje, som går genom dessa punkter.

Definition. Två punkter (α, β) och (x, y), som satisfiera ekvationen (1), kallas *poler*. Linjen (1) kallas *polar* till (α, β) och utgör således orten för polerna till punkten (α, β).

Sats 1. Om (p, q) är en godtycklig punkt på tangentkordans förlängning, så ligger (α, β) på förlängningen av tangentkordan till punkten (p, q).

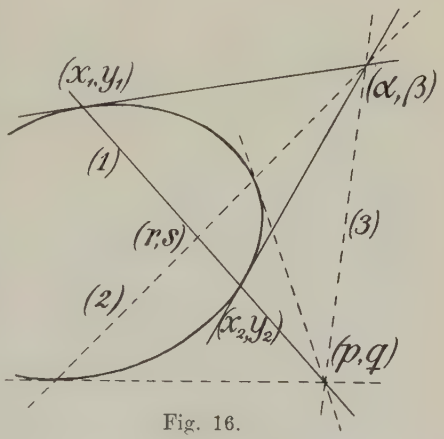


Fig. 16.

Ty då (p, q) satisfierar ekvationen (1), så är $\frac{\alpha p}{a^2}+\frac{\beta q}{b^2}=1$, vadan ekvationen för den mot (p, q) svarande tangentkordan

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

satisfieras av (α, β).

Följdsats. Om tangentkordornas — (1) och (2) — skärningspunkt är (r, s), så går räta linjen

$$\frac{rx}{a^2}+\frac{sy}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

genom punkterna (α, β) och (p, q).

Ty då (r, s) ligger på linjen (1), så är $\frac{\alpha r}{a^2}+\frac{\beta s}{b^2}=1$; alltså ligger (α, β) på linjen (3). Likaså finner man, att (p, q) ligger på (3).

Sats 2. Om en korda vrider sig kring en godtycklig punkt (h, k) *på kordan eller dess förlängning och tangenter dragas i kordans ändpunkter, så är orten för tangenternas skärningspunkt* $(\bar{x}, \bar{y})$ *räta linjen*

$$\frac{h\bar{x}}{a^2}+\frac{k\bar{y}}{b^2}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ty tangentkordans ekvation är $\frac{x\bar{x}}{a^2}+\frac{y\bar{y}}{b^2}=1$. Nu ligger (h, k) på tangentkordan; alltså är ekvationen (4) satisfierad.

Följdsats. Ekvation (3) *är orten för polerna till* (r, s). Ty (r, s) ligger på tangentkordan till vilken punkt som helst på (3).

Definition. Räta linjen (3) kallas för polar till (r, s).

Anm. Liknande satser och definitioner gälla för hyperbeln $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Polaren till en godtycklig punkt (h, k) blir $\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$. För parabeln $y^2=2px$ blir på samma sätt polarens ekvation $ky=p(x+h)$.

Alla dessa satser lämpa sig väl som uppgifter vid skrivningar.

(Forts.)

Om aritmetiska serier av högre ordning.

Av Y. KÄLLÉN.

Den fråga, som härmed upptages till behandling, är givetvis ur skolans synpunkt av periferisk natur. Anledningen, att jag likväl ägnar den några ord, är en i våra vanliga skollärоböcker i algebra förekommande typ av exempel av följande lydelse: »Sök summan av n termer i serien $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + \ldots$, då man vet, att summan är ett polynom av tredje graden i n.» Det ligger då nära till hands för en vaken lärjunge att undra, varför summan skall vara av tredje graden, då den allmänna termen är av andra graden. I Olsons algebra omnämnes på sid. 140 begreppet aritmetisk serie av andra ordningen och meddelas utan bevis, att en sådan series n:te term är ett andragradspolynom i n och summan av n termer ett tredjegradspolynom i n. Avsikten med följande rader är att ge ett elementärt bevis för dessa satser.

Sats 1. I en aritmetisk serie av andra ordningen är t_n (= *n:te termen*) *ett polynom av andra graden i avseende på n.*

Låt $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_n$ vara en aritmetisk serie av andra ordningen. Då är $t_2 - t_1 = a_1$; $t_3 - t_2 = a_2$; $t_4 - t_3 = a_3$, . . . $t_n - t_{n-1} = a_{n-1}$ en aritmetisk serie av första ordningen. Kalla differensen i denna serie för d. Man har alltså:

$a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$ . . . . $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$. Då är

$$t_2 = t_1 + a_1 .$$

$$t_3 = t_2 + a_2 = t_2 + a_1 + d = t_1 + 2a_1 + d .$$

$$t_4 = t_3 + a_3 = t_1 + 2a_1 + d + a_1 + 2d = t_1 + 3a_1 + d(1+2).$$

$$t_5 = t_4 + a_4 = t_1 + 3a_1 + d(1+2) + a_1 + 3d =$$
$$= t_1 + 4a_1 + d(1+2+3).$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$t_n = t_{n-1} + a_{n-1} = t_1 + (n-2)\,a_1 + d(1+2+\ldots+\overline{n-3}) + \\ + a_1 + (n-2)\,d = t_1 + (n-1)\,a_1 + d(1+2+3+\ldots \\ + \overline{n-2}) = t_1 + (n-1)\,a_1 + d\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

alltså ett andragradspolynom i n.

Omvänt gäller: *Om t_n är ett andragradspolynom i n, så är serien aritmetisk av andra ordningen.*

Låt nämligen $t_n = p + qn + r\cdot n^2$. Då är $t_n - t_{n-1} = \\ = p + qn + rn^2 - p - q(n-1) - r(n-1)^2 = q + r(2n-1) = \\ = q + r + 2r(n-1)$, vilket bevisar, att differenserna bilda en aritmetisk serie av första ordningen.

Sats 2. I en aritmetisk serie av andra ordningen är s_n (=summan av de n första termerna) ett polynom av tredje graden i avseende på n.

För att bevisa denna sats behöva vi först söka summan av en speciell aritmetisk serie av andra ordningen, nämligen serien $1+3+6+10+15+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}$.

$t_1 = 1$
$t_2 = 1 + 2$
$t_3 = 1 + 2 + 3$
$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4$
$t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
— — — — — — —
$t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$.

$$s_n = n\cdot 1 + (n-1)2 + (n-2)3 + (n-3)4 + \ldots + (n-\overline{n-1})n;$$

$$s_n = n + 2n - 2 + 3n - 6 + 4n - 12 + \ldots + n^2 - n(n-1);$$

$$s_n = n(1+2+3+4+\ldots+n) - 2\left(1+3+6+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\right) = \\ = \frac{n^2(n+1)}{2} - 2\left[s_n - \frac{(n+1)n}{2}\right] = \frac{n^2(n+1)}{2} - 2s_n + n(n+1);$$

$$3s_n = n(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right); \quad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Därefter behandla vi den allmänna serien. Med samma beteckningar som förut erhålles:

$$s_n = t_1 + (t_1 + a_1) + (t_1 + 2a_1 + d) + (t_1 + 3a_1 + 3d) + \ldots + \\ + \left[t_1 + (n-1)a_1 + \frac{d(n-2)(n-1)}{2}\right];$$

$$s_n = n \cdot t_1 + a_1(1 + 2 + 3 + \ldots + \overline{n-1}) + \\ + d\left[1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right].$$

Men enligt vad som nyss bevisats, är

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)n}{3}.$$

$$\therefore \quad s_n = n \cdot t_1 + \frac{(n-1)n}{2} a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{3}} d,$$

alltså ett tredjegradspolynom i n.

Det torde vara tämligen enkelt att på liknande sätt behandla aritmetiska serier av ännu högre ordning, vilka dock mera sällan förekomma på skolstadiet.

Försök med longitudinell stående vågrörelse.

Av ALBERT BJÖRKESON.

I våra mest använda läroböcker i fysik beskrives det utomordentligt vackra MELDEska försöket för åskådliggörande av den transversella stående vågrörelsen. Något motsvarande försök för den longitudinella stående vågrörelsen finnes ej angivet, och då få sådana äro kända, torde en demonstration härav sällan förekomma vid fysikundervisningen i våra skolor. Ett klarläggande försök på detta område är så mycket mera önskvärt, som den vanligen använda schematiska teckningen — en serie figurer, där partiklarnas lägen i olika tidsmoment angivas — är synnerligen otymplig i jämförelse med den, som t. ex. visar en transversell stående vågrörelse hos en sträng, där på en och samma teckning strängens lägen i olika tidsögonblick kunna utritas. Nedan beskrivna försök är lätt att utföra och åskådliggör tydligt och vackert den longitudinella stående vågrörelsen.

Utgångspunkt är det bekanta experimentet med ROGETS spiral. En metallspiral är upphängd i sin övre ände, och den nedre doppar nätt och jämnt ned i en skål med kvicksilver. Sändes en elektrisk ström genom kvicksilvret och spiralen, förkortar den senare sig, dess nedre ände lämnar kvicksilvret, och strömmen avbrytes. Spiralen sänker sig åter, doppar ned i kvicksilvret, strömmen slutes, och det hela återupprepas, så att spiralen kommer i egensvängningar, under det att en pulserande likström går genom densamma.

Anordningen vid det här beskrivna försöket visas i fig. 1. Som svängande kropp användes en metallspiral, vertikalt

upphängd och fastsatt i båda ändar. Denna spiral kopplas i serie med en annan mindre spiral, fastklämd vid ett av sina varv med en lämplig klämmare, t. ex. en plattång. Spiralens nedre ände doppar som vid ROGETS försök nätt och jämnt ned i en skål med kvicksilver. Ovanpå detta hälles ett lager av alkohol för att åstadkomma bättre strömavbrott. Slutes strömmen, kommer den mindre spiralen i svängningar, och genom spiralerna går en pulserande likström i takt med dessa svängningar. Om de äro i resonans med den större spiralens grundsvängning eller någon av dess översvängningar, kommer denna att dela upp sig i longitudinellt svängande partier. Göres från början den del av den mindre spiralen, som befinner sig under klämmaren, med hälften så många varv som den större, erhålles grundsvängningen hos den senare med en svängningsbuk på mitten och noder i de båda fasta ändarna. Flyttas sedan klämmaren till lägre liggande varv, erhålles allt högre svängningstal, och den större spiralen delar vid resonans upp sig i allt flera svängande partier.

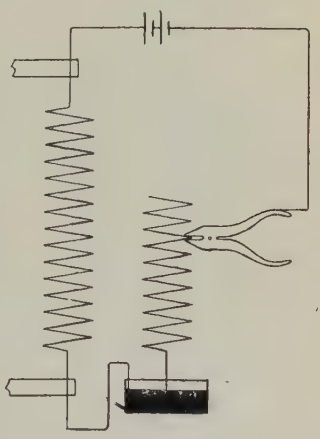


Fig. 1.

Undertecknad använde vid försökets utförande fosforbronstråd av 1 mm diameter. Spiralens diameter var omkring 30 mm och antalet varv 93. Lindningen gjordes på en järncylinder av 28 mm diameter, och tråden lindades i intill varandra liggande varv. För att trådvarven efter spiralens upphängning ej skola ligga periodiskt tätare och tunnare, måste vid lindningen noga tillses, att tråden ej torderas utan rullas upp från förrådsrullen på cylindern. Spännes spiralen upp vertikalt, ligga de nedre varven tätare än de övre på grund av trådens egen tyngd. Detta kan lätt kompenseras genom att något tänja isär de nedre varven mer och mer mot spiralens nedre ände. Hela

spiralens längd efter upphängningen var vid försöket i fråga omkring 60 cm. Som strömkälla användes ett 10-volts-batteri med förkopplingsmotstånd, så att maximiströmstyrkan blev 11 amp. Den tid strömmen vid varje svängning var sluten reglerades genom att höja eller sänka skålen med kvicksilver; medelströmstyrkan var 3 amp. Genom att ändra fästpunkten för den mindre spiralen kunde hos den större erhållas från 1 upp till 15 svängande partier, och sålunda alla svängningar upp till fjortonde översvängningen framställas. Vid de högsta översvängningarna användes av den kortare spiralen endast omkring 3 varv. För att amplituden på densamma då skulle bliva så stor, att strömbrotten gingo regelbundet, insattes i densamma en järnstav, vilket betydligt förhöjer effekten.

Fig. 2.

Om man med en båglampa kastar en skugga av spiralen på en vit skärm, kan man på denna mycket vackert iakttaga spiralens svängningar. Fig. 2 återger ett par sådana skuggbilder, där spiralen utför sin tredje resp. sjätte översvängning.

Ännu vackrare blir försöket, om spiralen belyses med intermittent ljus från en båglampa. Anordningen härför är följande: På axeln till en elektrisk motor uppsättes en pappskiva, försedd med tvenne diametralt motsatta hål på ungefär 15 cm avstånd från axeln. Genom dessa hål får det genom kondensorlinsen från båglampan samlade ljuset passera och sedan belysa spiralen. Sättes motorn i gång och regleras dess hastighet, så att ljusglimtarna komma med ungefär samma tidsmellanrum som spiralens svängningar eller en multipel därav, synes spiralen utföra mycket långsamma longitudinella svängningar, som genom att låta de ovannämnda tidsintervallen bli mer och mer lika kunna göras hur långsamma som helst. Det är synnerligen vackert och instruktivt att se, hur spiralens delar omväxlande gå till en nod och från den närmast liggande, så att täthetsvariationerna bliva störst i noderna och minst i svängningsbukarna.

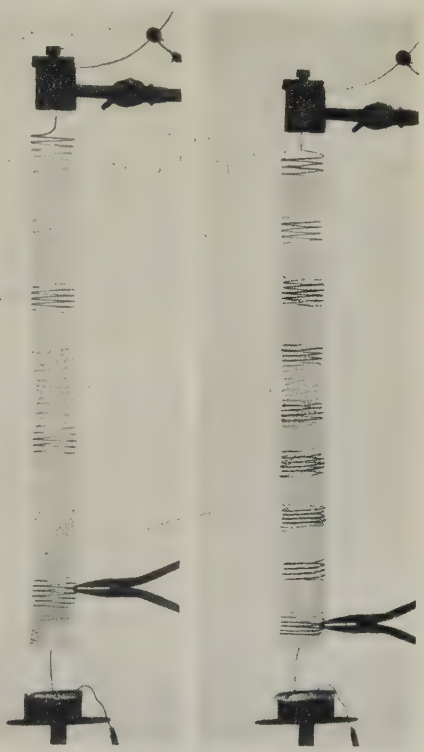


Fig. 3.

Med denna apparat kan man även åskådliggöra svängningstillståndet i en sluten orgelpipa. Fördenskull borttages den mindre spiralen, nedre änden på den större frigöres

och får nätt och jämnt doppa ned i kvicksilvret. Slutes strömmen, kommer spiralen i svängningar, och vi erhålla Rogets försök. Spiralen svänger då som luften i en sluten orgelpipa, då denna ger sin grundton. För att erhålla en översvängning, kan man liksom vid framställandet av en strängs översvängningar beröra den punkt, där en nod önskas. Fasthålles spiralen på en punkt t. ex. $^1/_7$ av sin längd från nedre änden, erhålles dess tredje översvängning, och svängningarna ske som vid tredje övertonen i en sluten orgelpipa. Med den ovannämnda spiralen erhölls utan svårighet ända upp till tionde översvängningen. Fig. 3 återger spiralens utseende vid tredje resp. åttonde översvängningen. — Med stor fördel användes även i detta fall intermittent belysning för påvisandet av den verkliga rörelsen.

Den fotografiska negativprocessen.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

De flesta läroböcker i kemi omnämna vid behandlingen av silver de fotografiska processerna. Dessa behandlas även av läroböckerna i fysik i samband med kameran. Då emellertid framställningen icke sällan är rätt föråldrad och i vissa fall rentav felaktig, torde en redogörelse för de fotografiska processerna enligt nutida uppfattning försvara sin plats i denna tidskrift och möjligen bidraga till att skingra den rådande oklarheten rörande dessa förhållanden.

Vid framställningen av en fotografisk plåt beredes först en *emulsion* av bromsilver i en uppvärmd gelatinlösning. Vid avsvalning stelnar gelatinet. Hela massan pressas därefter till tunna strimlor, som ursköljas väl för avlägsnande av det vid bromsilvrets framställning använda överskottet av bromsalter. Efter en mer eller mindre långvarig »mogningsprocess», varunder bromsilverkornen öka i storlek och ljuskänslighet, gjutes emulsionen på väl rengjorda glasskivor. Gelatinet är härvid relativt vattenhaltigt, varigenom dess smältpunkt hålles låg; gjutningen sker därför vid en så pass låg temperatur som exempelvis 30°. Efteråt får överskottet av vatten avdunsta, varigenom den ljuskänsliga hinnan på glaset blir mera hållfast.

En plåt utgör sålunda en glasskiva, på vars yta befinner sig ett tunt gelatinskikt, vari ett stort antal bromsilverpartiklar ligga spridda. Då en läroboksförfattare säger, att det ljuskänsliga skiktet på plåten består av en *lösning* av bromsilver i gelatin, lämnar han alltså en fullkomligt felaktig uppgift. Bromsilvret befinner sig nämligen i fast form i små separata partiklar. Dessa partiklar äro kristalliniska och bestå mycket ofta av triangulära eller sexsidiga

kristalltavlor (fig. 1—2); partiklarna hava dock ej alltid fullt klart utbildad kristallform till det yttre, utan visa även ofta ett avrundat utseende (fig. 4).

Bromsilverpartiklarnas storlek varierar, men är av storleksordningen 0,001 mm. En del emulsioner hava korn

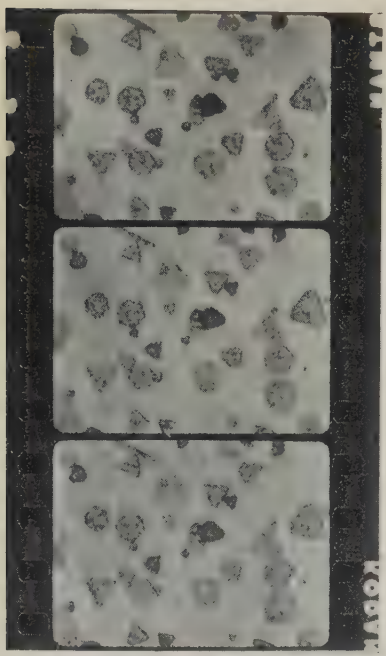


Fig. 1.

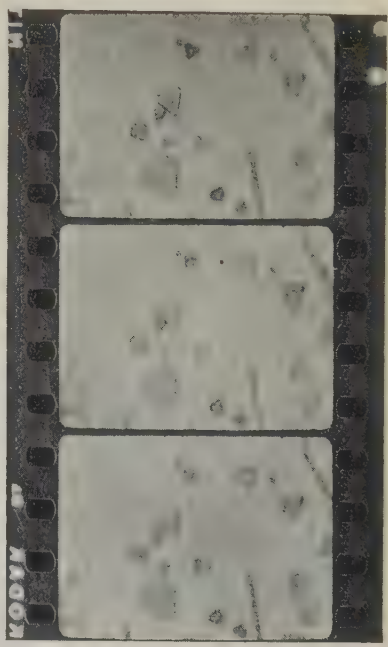


Fig. 2.

Tavelformiga bromsilverkristaller med triangulär eller sexsidig genomskärning (efter en kinomikrofotografering vid Kodaklaboratoriet av framkallningsprocessens förlopp).

av tämligen ensartad storlek; i andra emulsioner äro variationerna i kornstorlek ganska betydande.

Belyses och framkallas en plåt, så svärtas den på grund av utreducerat silver. I stort sett ökas svärtningen, då belysningen (»exponeringen») ökas. Sambandet mellan svärtning och belysning är emellertid rätt komplicerat och brukar grafiskt angivas av den s. k. »svärtningskurvan».

Fig. 3 är ett exempel på en sådan kurva. Ordinatan representerar »svärtningen», abskissan belysningens storlek, båda i logaritmisk skala. Svärtningen, som i det närmaste är proportionell mot den utreducerade silvermängden, utgör logaritmen för förhållandet mellan infallande och genomgående ljus. I den mån detta talvärde är stort, kommer huvudparten av ljuset att absorberas av silverskiktet, och plåten ser därför tät ut i genomsikt.

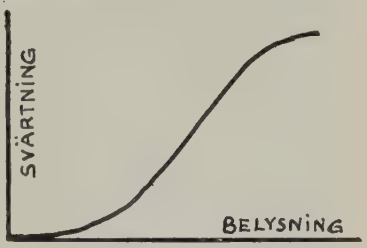


Fig. 3. Svärtningskurva.

Vid granskning av svärtningskurvan (fig. 3) finner man, att vid belysningar av ringa storlek endast obetydlig eller alls ingen svärtning av plåten erhålles vid dess framkallning: *underexponering*. Ökas belysningen, så växer den resulterande svärtningen allt raskare. Vid fortsatt ökning av belysningen blir svärtningsökningen återigen mindre. På grund av denna inflexion hos kurvan kommer området närmast omkring inflexionspunkten att erhålla — approximativt — ett lineärt förlopp. Detta parti av kurvan motsvarar *normal* exposition av plåten. Högre upp blir kurvan flack, och *överexponering* har ägt rum. Går man till mycket stora överexponeringar, kan det t. o. m. hända, att kurvan efter ett maximum vänder nedåt. Detta fenomen kallas *solarisation* och yttrar sig däri, att bilden eller delar av den direkt blir positiv vid framkallningen.

Givetvis har framkallningstiden ett betydande inflytande på dessa förhållanden. Vid mycket kortvarig framkallning bliva endast små silvermängder utreducerade, och en obetydlig svärtning erhålles. Förlänges framkallningstiden, så tilltager svärtningen alltmera för att slutligen närma sig ett visst bestämt gränsvärde. Detta gränsvärde bestämmes av den orsakande belysningen. Ju mindre denna har varit, desto mindre blir också den svärtning, som erhålles även vid mycket långvarig framkallning.

Åtskilliga teorier hava uppställts för att förklara negativprocessen. Meningarna hava varit mycket starkt delade, såsom alltid, då man vet för litet för att kunna träffa ett säkert val mellan dem. Till att börja med är det klart, att gelatinet i plåten spelar in i processen, emedan det i hög grad bidrager till den stora känsligheten. Äldre negativmaterial med andra bindemedel komma i detta hänseende långt efter. I fråga om belysningens verkan antog en av de äldre teorierna, att halogensilvret av ljuset reduceras till en s. k. subhaloid (d. v. s. en silverförening med mindre halogen än den normala), varefter subhaloiden i framkallningen reduceras till silver. Det bör bestämt betonas, att subhaloidernas existens är fullständigt hypotetisk och aldrig kunnat experimentellt påvisas. För närvarande synes för övrigt denna hypotes vara stadd på avskrivning.

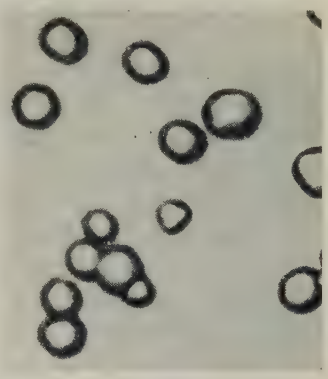
Tack vare åtskilliga under det senaste decenniet utförda undersökningar veta vi nu betydligt mera om förhållandena i plåten än för några år sedan. Trots detta återstår säkerligen ännu mycket att göra, innan full klarhet nåtts inom detta område.

En ny erfarenhet är den, att varje liten bromsilverpartikel utgör ett system för sig, och att ingen silvertransport äger rum mellan olika korn, åtminstone normalt. En viss belysning är antingen tillräcklig eller otillräcklig för att ett visst bromsilverkorn skall bliva framkallbart. Är belysningen tillräcklig, så kan hela bromsilverkornet reduceras till silver, om framkallningen får fortgå tillräckligt länge. Är belysningen återigen otillräcklig, så båtar utsträckt framkallningstid till intet; bromsilverkornet är alltjämt lika oförändrat. Dessa förhållanden hava klart påvisats av The Svedberg. Under sådana omständigheter är det tydligt, att svärtningskurvan, sådan den erhålles vid långvarig framkallning, återspeglar ändringen av antalet framkallbara korn med belysningen. Tidigare hade man nog rätt allmänt föreställt sig, att vid ökad belysning en större silverreduktion skulle kunna äga rum i vart och ett av de skilda

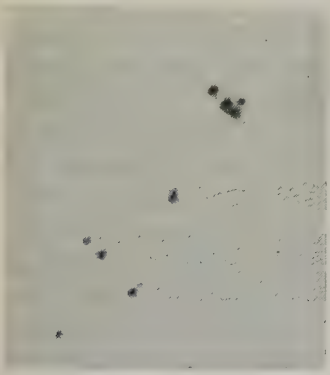
kornen. Nu finner man, att en ökad svärtning måste bero på, att fler korn blivit framkallbara.

Svedberg visade även, att stora bromsilverkorn såtillvida äro ljuskänsligare än små korn, att en och samma belysning gör ett större procenttal av de stora kornen framkallbara än av de små.

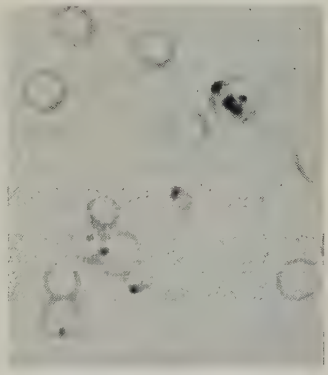
En upptäckt av mycket stor betydelse gjorde Svedberg, då han visade, att framkallningen sätter in i vissa bestämda punkter av kornet, eller m. a. o., att ljusets verkningar äro koncentrerade till dylika små centra i bromsilverkornet. Det sätt, på vilket Svedberg lyckades visa detta, var följande: En plåt med



a.



b.



c.

Fig. 4 a—c. Framkallningscentra i bromsilverkorn (efter The Svedberg).

så litet antal bromsilverpartiklar, att dessa ligga i ett enda lager och sålunda ej delvis täcka varandra, användes för undersökningen. Plåten exponerades och framkallades under så kort tid, att ännu ingen svärtning kunde iakttagas. Reduktionen avbröts medelst utspädd ättiksyra, varefter plåten sköljdes och torkades. Härefter

mikrofotograferades den vid rött ljus. Då den använda plåten ej påverkas av rött ljus, tager den ingen skada; däremot avbildas densamma i stark förstoring (t. ex. 4 000 gånger) på en s. k. pankromatisk plåt, d. v. s. en plåt, som genom särskild behandling blivit känslig även för rött ljus. Mikrofotografien visar ett antal bromsilverkorn (fig. 4 a). Härefter fixeras plåten, varvid bromsilvret bortlöses medelst en natriumtiosulfatlösning. Plåten sköljes ånyo, torkas och mikrofotograferas. Därvid visar sig, att små mörka fläckar framträda på vissa ställen, där tidigare bromsilverpartiklar varit belägna (fig. 4 b). Lägger man figurerna a och b över varandra, så erhålles fig. 4 c. Man ser av denna figur, huru framkallningen sätter in på vissa bestämda punkter av bromsilverkornet. En del bromsilverkorn hava inga dylika »groddar» eller »centra», andra hava en eller t. o. m. flera av dem. — Fig. 4 a—c äro hämtade ur en uppsats av professor Svedberg i *Kosmos* för år 1922.

Ett annat förhållande av intresse är, att dessa centra alla äro fördelade över kornets yta. Svedberg har funnit, att fördelningen följer slumpens lagar.

Frågan blir nu närmast, huru dessa känslighetscentra uppkomma och av vad art de äro. Bromsilverkornen äro ju alla kristalliniska och det är på grund härav svårt att inse, varför de växla i känslighet. Det ligger därför nära till hands att tänka sig, att själva känslighetscentra skulle bestå av små mängder främmande substans. Härvid har man i första hand att tänka på gelatinets närvaro. Som redan blivit nämnt har man med gelatin som bindemedel erhållit negativmaterial av betydligt större känslighet än med andra bindemedel. Man har även kunnat påvisa närvaron av små mängder gelatin i själva bromsilverkornen eller vid deras yta. Gelatinets betydelse för känsligheten har sålunda mycket ofta blivit kraftigt framhållen. Det visar sig emellertid, att olika gelatinsorter besitta högst olika värde i detta hänseende, varför man talat om »aktivt» gelatin och »inaktivt» gelatin. Då gelatinet ej är en kemiskt

väl definierad substans, så ligger häri ingenting egendomligt.

Ett synnerligen viktigt rön, som i sig visade sig innehålla fröet till frågans uppklarande, gjordes av en av Kodaks emulsionsteknici, PUNNETT. Denne lyckades påvisa, att man från aktivt gelatin, som alltså gav hög känslighet, kunde göra ett extrakt, vilket i sin tur kunde aktivera förut inaktivt gelatin. Med detta rön som utgångspunkt upptogs frågan av SHEPPARD och hans medhjälpare vid det stora Kodaklaboratoriet i Rochester. De inriktade sitt arbete på att söka identifiera den verksamma beståndsdelen hos gelatinet, »gelatin X», och de hade också framgång i denna sin strävan.

Det visade sig, att »gelatin X» kunde fällas med aluminiumhydroxid, och att det var lösligt i alkohol, ligroin m. fl. lösningsmedel. Relativt koncentrerade lösningar av den okända substansen kunde härigenom erhållas.

Då dylika aktiva lösningar avdunstades, erhölls en vaxartad återstod, som huvudsakligen bestod av cholesterol. Denna substans finnes i åtskilliga växters frön, och det lyckades även att erhålla aktiv substans ur ärter, bönor o. d. Emellertid är ren cholesterol inaktiv och det är därför tydligt, att den aktiva substansen endast finnes närvarande såsom en i detta ämne upplöst förorening.

En ny hållpunkt erhölls, då det visade sig, att vid upphettning av aktiva emulsioner en tydlig vitlökslukt förmärktes. Undersökningarna erhöllo härigenom en ny inriktning. Därvid befanns, att svartsenapsfrö gav ett betydande utbyte av aktiv substans. Det syntes alltså råda ett visst samband mellan »gelatin X» och allylsenapsolja. De fortsatta undersökningarna gåvo sedermera vid handen, att gelatinets verksamma beståndsdel var allylisorodaniden ($C_3H_5 \cdot NCS$), vilken förekommer i gelatin ungefär i proportionen 1 : 1 000 000. Det visade sig vidare vid prövning av en mängd olika föreningar, att det ej är allylgruppen, som betingar den ökade känsligheten utan att denna kommer från isotiocyanatradikalen. En rad substanser, innehållande

denna radikal, voro verksamma. Anmärkas bör även, att normala tiocyanat ej visade sig vara aktiva.

Emulsionens känslighetsstegring sker under den s. k. »mogningen». Därvid behandlas emulsionen i värme med ammoniak. Av ammoniak omvandlas allylisorodaniden till en tiokarbamid (ett tiourinämne). Denna substans reagerar sedan med silverbromid under bildning av svavelsilver, vilket ämne alltså skulle utgöra de skilda bromsilverkornens känslighetscentra. Reaktionerna skulle kunna skrivas på följande sätt:

I. Isotiocyanatets överföring till tiokarbamid genom ammoniak:

$$R \cdot NCS + NH_3 \longrightarrow C(=S)(NHR)(NH_2)$$

varvid tiokarbamiden eventuellt kombineras med silverhaloiden till någon förening. Så förena sig 1 mol. tiokarbamid och 1 mol. AgBr till en väl kristalliserande substans.

II. Dessa silverföreningars sönderfall under bildning av svavelsilver:

$$C(=S)(NH_2)(NHR) + 2\,AgBr = Ag_2S + 2\,HBr + C(\equiv N)(NHR)$$

Det synes nu till att börja med märkligt, att Na_2S och liknande substanser ej kunna utnyttjas för känslighetsstegring. Detta beror tydligen därpå, att silversulfiden måste avskiljas i form av diskreta fläckar, vilka ej få överskrida en viss storlek. Stora sulfidfläckar förefalla att giva upphov till s. k. »slöja», som yttrar sig däri, att vid framkallningen alltför stark reduktion erhålles, oberoende av ljusets insats. I själva verket synes direkt silversulfidbildning genom S-joner ej vara ägnad att giva effektiv känslighetsökning, utan det förefaller nödvändigt att gå en omväg

för sulfidframställningen för att ej erhålla alltför rask utfällning och därmed för stora sulfidfläckar.

Ett annat förhållande att lägga märke till är, att silversulfiden (Ag_2S) kan ersättas med Ag_2Se och Ag_2Te, vilka substanser även kunna tjänstgöra som känslighetscentra.

De här nämnda undersökningarna av SHEPPARD publicerades 1925. Det gällde nu att söka närmare förklara, på vad sätt de små sulfidfläckarna i bromsilverkornen kunna höja känsligheten hos dessa. Erkännas måste, att de först framställda teorierna rörande denna fråga verka rätt vaga. Nyligen hava emellertid nya synpunkter framlagts av ett par medarbetare, HICKMAN och TRIVELLI, vid Kodaklaboratorierna. Givetvis hava dessa teorier ej ännu hunnit slutgiltigt genomgå den kritiska skärselden; det torde dock kunna erbjuda ett visst intresse att taga del av de givna förklaringarna.

HICKMAN angriper frågan från rent kemiska synpunkter. Han förklarar orsaken till bromsilvrets ökade känslighet genom sulfidfläckarnas närvaro ligga däri, att dessa sulfidfläckar förmå upptaga den vid bromsilvrets spjälkning genom ljuset frigjorda bromen, varigenom denna hindras att åter angripa silvret och omsätta det till bromsilver igen. Reaktionsförloppet skulle lämpligen kunna uttryckas genom följande reaktionsformler.

$$AgBr + \text{ljus} = Ag + Br$$
$$2\,Br + 2\,Ag_2S = 4\,Ag + S_2Br_2$$

Kombineras dessa formler, erhålles följaktligen:

$$2\,AgBr + \text{ljus} + 2\,Ag_2S = 6\,Ag + S_2Br_2$$

Samtidigt med att ljuset primärt frigör två silveratomer ur bromsilvret, erhålles sålunda ytterligare fyra silveratomer genom den sekundära reaktionen, varigenom alltså en relativt stor silvermängd bildas. De sekundära verkningarna skulle alltså bestå i sulfidfläckens omvandling till ett litet silverkorn. Denna silverkärna ökas, dels genom det primärt utfällda silvret, dels genom senare bireaktioner. Föreningen

S_2Br_2 uppoxideras sålunda till svavelsyra och bromväte enligt formeln:

$$S_2Br_2 + 3\,H_2O + 5O = 2\,H_2SO_4 + 2\,HBr.$$

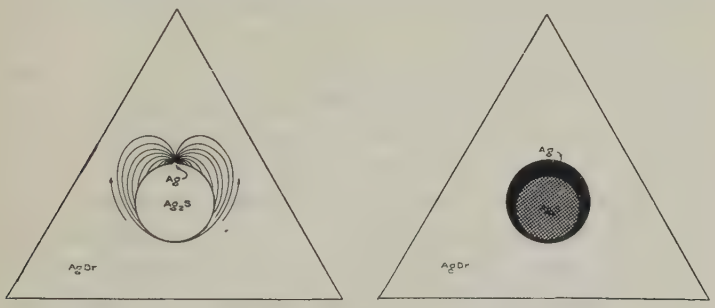
Detta kan även uttryckas så, att oxidationen av S_2Br_2 måste medföra reduktion av någon annan produkt och därvid kommer återigen närmast AgBr i fråga. Det är följaktligen tydligt, att den genom dessa reaktioner utfällda silvermängden kommer att bliva flerdubbelt större än den direkt utfällda. Nu anses emellertid den lilla silverkärnan betydligt mera effektiv som kärna för silverutfällningen vid den efterföljande framkallningen än vad silversulfidfläcken är. Då därjämte silverkärnan på grund av de nämnda reaktionerna flerdubblats i storlek jämfört med den ursprungliga sulfidfläcken, så skulle kornets starkt ökade framkallbarhet genom belysningen fått sin förklaring.

Hickman finner ett stöd för sina antaganden i för detta ändamål av honom utförda experiment, varjämte av andra forskare fastställts, att hans framställning tillfredsställer de termodynamiska fordringarna.

Trivelli utgår i sin teori från antagandet, att känslighetscentra ej uteslutande bestå av silversulfid, utan till en viss del även av silver, som befinner sig i kontakt därmed. Enligt åtskilliga nyare undersökningar synes också detta antagande hava fog för sig. Vidare stöder han sig på undersökningar av Arrhenius m. fl., vilka visa att bromsilvret blir starkt elektriskt ledande vid belysning, samt på Becquerels undersökningar från 1860-talet, enligt vilka starka elektriska spänningar uppkomma, om fast silverhaloid placeras mellan en metall och en ledande lösning och det hela utsättes för ljus.

Trivelli tänker sig saken på följande sätt: Antag, att vi hava ett bromsilverkorn (triangeln i fig. 5 a), på vilket befinner sig en svavelsilverfläck (cirkeln! fig. 5 a—b), samt omedelbart vid densamma en liten silverpartikel (den svarta lilla fläcken i figuren). Vid belysningen träder då det lilla galvaniska elementet $Ag \mid AgBr \mid Ag_2S$ i verksamhet. På grund

av bromsilvrets starkt ökade ledningsförmåga går strömmen från Ag_2S genom AgBr till Ag-partiet i enlighet med strömlinjerna och pilarna i fig. 5 a. Följden härav blir en utfällning av silver vid silverfläcken, som därför hastigt ökar i storlek. På grund av strömlinjernas större täthet vid silverkornets gränser, kommer utfällningen här att bliva störst, varför silverkornet växer ut längs Ag_2S-fläckens yta, tills silvret helt omsluter denna (fig. 5 b). Av en relativt ringa silvermängd erhålles alltså ett relativt stort silverkorn, vilket gör, att bromsilverkristallen efteråt är framkallbar.



a. b.

Fig. 5.

Avbrytes exponeringen (belysningen), så upphöra bromsilvrets ledningsförmåga och de elektriska spänningarna, varför även silverutfällningen tager slut. Den latenta bildens uppkomst skulle alltså tillskrivas av ljuset utlösta elektrokemiska processer.

Trivellis teori har flera fördelaktiga drag. Först och främst ingår ju i densamma alla de nyss nämnda förut isolerade upptäckterna rörande de elektriska spänningarna och ledningsförmågan etc., ävensom rörande sulfidfläckarnas existens m. m. Vidare blir ogiltigheten av Bunsen-Roscoes lag lätt förklarlig ur de gjorda antagandena. Denna lag utsäger, att produkten av belysningens intensitet och belysningstiden är bestämmande för den erhållna effekten. Det har emellertid senare visat sig, att vid korta exponeringar betydligt lägre verkningar erhållas även vid mycket stora

ljusintensiteter än vad som motsvarar denna produkt. Detta förklaras som nämnt lätt ur Trivellis teori. Strömmen behöver naturligtvis tid för att nå sitt maximala värde. Vid mycket kortvarig belysning hinner strömmen överhuvudtaget ej att nå detta maximalvärde, och silverutfällningen blir därför relativt obetydlig, yttrande sig i en föga utpräglad »latent bild». Av samma orsak kommer intermittent (ofta avbruten) belysning att giva sämre verkan än kontinuerlig belysning.

Om Trivellis teori sålunda synnerligen lätt förklarar en hel del fenomen, så är den ej fullt lika lycklig i andra fall. Så t. ex. måste Trivelli för förklaring av den s. k. optiska sensibiliseringen göra några tillägg till sin teori, vilka nu måste göras till föremål för experimentell prövning. Den optiska sensibiliseringen yttrar sig däri, att man genom bromsilverpartiklarnas infärgning kan öka deras känslighet för ljus av större våglängder än det mest verksamma blå och violetta ljuset. På dessa förhållanden skall jag ej ytterligare ingå. Det torde i varje fall vara klart, att Trivellis teori bättre än de flesta andra reder ut en stor mängd av problem. Vad vidare Trivellis och Hickmans teoriers inbördes förhållande angår, så är det tydligt, att dessa teorier ingalunda stå i något motsatsförhållande till varandra; snarare kan man säga, att de komplettera varandra. Trivellis teori diskuterar endast silvertransporten genom elektrolys, men går ej in på den frigjorda bromens verkningar. Då sulfidfläcken ju ligger nära kornets yta, kan en del av bromen tänkas diffundera bort och upptagas av gelatinet; en annan del återigen kan i enlighet med Hickmans idé angripa sulfidkornet.

Lunds Katedralskolas kemiska institution.

Av KNUT PARCK.

Efter att under en längre tid hava fört en ambulerande tillvaro kan nu Lundaläroverkets kemiundervisning bedrivas i rymliga och tidsenliga lokaler.

Den nya institutionen omfattar en i öster-väster liggande fil av sex rum på nedre botten av gamla läroverksbyggnaden utefter Svanegatan (söder). Härtill kommer ett längst i öster liggande stort reservrum, som nu och tillsvidare disponeras för annat ändamål, men som vid behov kan tagas i anspråk för kemiundervisningen antingen som laboratorium eller lärosal. För den skull är golvet belagt med asfalt och vissa väggar kakelklädda samt försedda med rökgångar, rörledningar o. dyl.

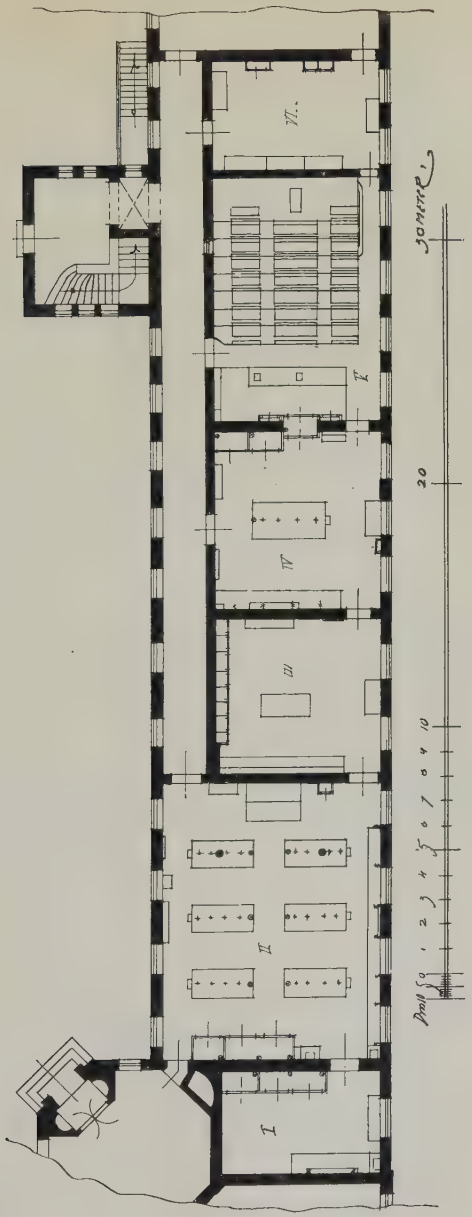
Från en med rummen jämlöpande korridor kommer man in i de olika rummen (se planritningen). Dessa äro höga, ljusa och ha samtliga väggar helt oljemålade.

Längst i väster ligger vätesvavlerummet (I) med en golvyta $6{,}3 \times 4{,}3$ m^2. Vid östra väggen ett större dragskåp. Skivorna i detta och övriga dragskåp utgöras av c:a 50 mm tjocka plattor av stålslipad cement. Detta material är emellertid ej motståndskraftigt mot t. ex. konc. svavelsyra; från början var det meningen att använda s. k. svart granit, vilket dock av ekonomiska skäl måste frångås. Väggarna i dragskåpen äro helt kakelklädda och såväl övre som nedre utsugningskanaler försedda med skjutluckor av vitt porslin. I övre kanalerna äro snittbrännare placerade. Alla gaskranarna äro anbragta på ett längs dragskåpets framsida gående mässingsrör (ungefär som på en större Bolinderspis), så att regleringen av gaslågorna även kan ske, då

skjutfönstren äro neddragna. I kapellet finnas tre vattenslangkranar och under varje sådan ett röravlopp av s. k. hårdbly, stickande c:a 50 mm över skivan. Alla vattenlås inom institutionen äro av hårdbly.Vid västra väggen finnes ett stort, väggfast bord med dubbla gasuttag samt vid ena ändan en större vask; över bordet en hylla och framför fönstret ett mindre bord. Medelst en elektrisk fläkt kan rummet effektivt utvädras. Golvbeläggningen i detta rum liksom i laboratoriet utgöres av syrefast asfalt, i övriga rum av trä.

Laboratoriet (II) med en golvyta av $12{,}3 \times 8{,}8$ m^2 har fyra fönster åt söder och lika många åt norr. I öster leder en dörr ut till korridoren och en till vågrummet (III); i väster finns — förutom ingång till vätesvavlerummet — en reservutgång. Dragskåpet i detta rum är anordnat ungefär som det i vätesvavlerummet. Bredvid kapellet finns en diskbänk med blyklädd skiva, över vasken en varmvattenapparat. Utefter södra väggen ett långt, väggfast arbetsbord med lådor men utan underrede; vid östra väggen ett katederbord och bakom detta svarta tavlor. I ett skåp med glasdörrar förvaras vid laborationerna behövliga utensilier av glas, porslin m. m. Av arbetsborden i rummets mitt äro fyra äldre men restaurerade och något ändrade, de två övriga nya och av något annat utseende. Vart och ett av borden har en utefter mitten gående hylla för reagensflaskor m. m. samt vid ena ändan en vask och vid den andra en vattensugpump med avloppsledning.

Från laboratoriet kommer man in i våg- och förrådsrummet ($6{,}3 \times 6{,}5$ m^2), där en utefter västra väggen gående skiva av stålslipad cement utgör lärjungarnas vågbord; på en mindre cementskiva på södra väggen är analysvågen placerad. Utefter norra väggen finnas skåp för apparater m. m. Förbrukningsartiklar av glas och porslin äro placerade i ett öppet hyllskåp. I detta rum finnes institutionens elektriska kopplingstavla, ansluten till stadens likströmsnät (240 volt). Från denna fördelningstavla (från Gebr. Ruhstrat, Göttingen) kan ström dirigeras till fyra uttag på olika



Katedralskolans i Lund lärosalar för kemi.

platser inom institutionen. I detta rum finnas inga gas- eller vattenkranar.

Lärarnas arbetsrum (IV) med en golvyta av $7{,}2 \times 6{,}5$ m^2 har två arbetsbord, var och ett med sin vask samt det ena dessutom försett med vattenluftpump. Dessutom finnas i rummet hyllor för kemikalier, skrivbord, väggfast giftskåp samt två dragskåp, varav det ena är gemensamt med lärosalen.

Denna (V) har tilltagits stor med tanke på att läroverket kan hava behov av en föreläsningssal med sittplatser för ett par klassavdelningar. Golvytan är $9{,}8 \times 6{,}5$ m^2; 50 sittplatser på gradiner finnas. Katederbordet, som har en större (tre vattenkranar) och en mindre vask, befinner sig på en estrad. På vardera sidan om svarta tavlan (framför dragskåpet) finnes ett skåp med glasdörrar, avsett för preparat, reagenser m. m; längs estradens norra sida två hyllor för bägare, kolvar m. m. Dragskåpet är försett med skjutfönster — åt lärosalen av tjockt spegelglas, åt förberedelserummet av karrerat glas.

Rummet längst i öster (VI) med en golvyta av $4{,}4 \times 6{,}5$ m^2 innehåller montrer för geologiska samlingar samt bokskåp och skrivbord.

Belysningen i rummen är dels halvindirekt takbelysning och dels direkt (hisspendlar över de flesta arbets- och vågbord). För alla fönstren finnas draggardiner och i lärosalen dessutom ljustäta, hissbara gardiner.

Ett stroboskopiskt försök.

En av våra kända industrichefer har ofta förbryllat tekniskt intresserade gäster i sitt hem genom att anmoda dem förklara följande experiment med ett litet kullager. Kullagret var av den vanliga sorten med tvenne koncentriska ringar, mellan vilka fanns en krans blankpolerade stålkulor av några mm diameter, som intensivt reflekterade ljuset från de elektriska lamporna i rummet. Om man med ena handens fingrar höll den inre ringen fast och med den andra handen satte den yttre ringen i hastig rotation, så roterade naturligtvis kulorna åt samma håll som denna. Emellertid inträffade alltid, att kulorna skenbart hejdade sig ett ögonblick, varefter de — utomordentligt illusoriskt för resten — föreföllo att rotera åt motsatt håll. Först sedan hastigheten nedgått avsevärt, syntes de återtaga den ursprungliga rörelseriktningen.

Fenomenet måste tydligen bero på rummets belysning. Det uppträdde ej, om försöket gjordes i dagsljus eller i skenet från brasan, men väl om det utfördes, när lamporna voro tända. Dessa matades nämligen med växelström av endast 25 perioder. Vid detta låga periodtal hinner glödtråden avkylas så mycket under tiden mellan tvenne maximalvärden hos strömstyrkan, $^1/_{50}$ sekund, att ljusintensitetens variationer giva sig direkt tillkänna för ögat som hastiga »darrningar» i lamporna. Den skenbara rotationsriktningen är tydligen bestämd av den vinkel, som varje kula hinner vrida sig under $^1/_{50}$ sekund.

För att undersöka saken närmare belyste jag med intermittent ljus en roterande, svart pappskiva med kritade sektorer, belägna på lika avstånd från varandra. Skivan erbjöd bilden av en stroboskopisk stjärna (man jämföre med den s. k. Gassiots stjärna, som uppkommer, om ett med intermittent ström drivet Geisslerrör får rotera). Som man kunde vänta sig, visade sig stjärnan vara orörlig, om skivan under tiden mellan tvenne ljusblixtar hade vridit sig en vinkel, motsvarande tvenne sektorers vinkelavstånd. (Härav fås, att villkoret för stillastående stjärna uttryckes genom ekvationen $n = k/at$, där k är ett helt tal, n = skivans varvantal, a = antalet sektorer och t = tidsintervallet mellan två på varandra följande belysningsmaxima.) Om man, utgående från orörlig stjärna, något ökade skivans hastighet, syntes

stjärnan vrida sig åt samma håll som motorn, på vars axel skivan var fästad; minskades hastigheten, rörde sig stjärnan åt motsatt håll.

Den intermittenta belysningen åstadkoms därigenom att en glödlampa för likström lades inne i en fotografikamera, vars slutare ställts på »ögonblick». Vid axeln till en långsamt gående motor fästes en grov järntråd, som i sin fria ände bar en liten träbit. Kameran och motorn monterades så, att träbiten bragte kamerans avtryckare att fungera en gång för varje varv. Anordningen visade sig vara fullt användbar, då man önskade få väl markerade ljusglimtar av lägre frekvens, men den är ej att rekommendera, då kamerans slutare naturligtvis ej far väl av behandlingen. I stället kan man med fördel använda den vanliga metoden med ljuskällan skärmad av en roterande skiva, försedd med slitsar.

Detta försök gjordes för flera år sedan. Sedermera har jag funnit, att E. GÜNTHER ingående studerat den stroboskopiska stjärnan och använt fenomenet som grundval för metoder att mäta varvantal och korta tider. GÜNTHER har publicerat resultaten av sina försök dels i Physikalische Zeitschrift **22,** 1921, sid. 369, och dels i Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht **34,** 1921, sid. 112.

Torgny Edqvist.

Kirchhoffs andra strömförgreningslag.

Vid genomgången av KIRCHHOFFS lagar och deras tillämpningar har säkerligen mer än en fysiklärare kommit till den uppfattningen, att den formulering, som i läroböckerna givits åt den *andra* lagen, knappast kan sägas besitta den enkelhet och lättfattlighet, som önskvärt vore. Lagens klassiska, i våra läroböcker bibehållna formulering, lyder som bekant: i varje sluten krets är algebraiska summan av alla elektromotoriska krafter lika med algebr. summan av alla produkterna av strömstyrka och motstånd (= potentialfallen). »Givetvis måste såväl alla elektromot. krafter som alla strömstyrkor räknas positiva i samma led», säger en läroboksförfattare i sin kommentar till lagen, en annan åter giver följande förtydligande: »strömmarna räknas positiva i en viss omloppsriktning; en elektromotorisk kraft räknas positiv, då det potentialsprång, som den framkallar, växer i den antagna omloppsriktningen». Vad som framför allt bidrager till att förvirra eleverna, är likhetstecknet mellan elektromot. krafter och potentialfall. Att behöva räkna potentialfall positiva och

potentialstigningar negativa, ter sig för den, som genom Ohms första lag fått i sig inpräntat, att potentialen faller, om man går i strömmens riktning, men stiger, om man går mot strömmen, något främmande för att icke säga motbjudande. Säkerligen torde den hos såväl elever som många lärare förefintliga respekten för KIRCHHOFFS lagar ha sin rot just i de besvärligheter i teckenavseende, som ett slaviskt följande av ovannämnda formulering kan medföra.

Vid min undervisning har jag åt den andra lagen givit en annan och i mitt tycke enklare formulering: *i en sluten strömkrets är den algebraiska summan av alla potentialändringar lika med noll.* Har man framställt potentialen som ett arbetsbegrepp, följer lagen omedelbart ur energiprincipen (omöjligheten av ett perpetuum mobile).

Vid tillämpningen förfar man på följande sätt. Strömkällornas poler förses med vederbörliga tecken, och strömriktningarna markeras med pilar (fig. 1). Man betecknar med P potentialen i t. ex. förgreningspunkten A och går runt i riktningen ABC (eller den motsatta, likgiltigt vilken). Beteckningar framgå av fig.; i grenmotstånden äro inräknade resp. strömkällors inre motstånd. På sträckan $A—B$ gå vi i strömmens riktning, potentialen i B är alltså $P - r_1 i_1$; på sträckan $B — C$ gå vi dels mot strömmen, varvid potentialen stiger med beloppet $r_2 i_2$, dels gå vi i ett element från + pol till — pol, varvid potentialen sjunker med beloppet e_1. *I* grenpunkten C är således potentialen $P - r_1 i_1 + r_2 i_2 - e_1$. På samma sätt fås, att potentialen efter återkomsten till A är $P - r_1 i_1 + r_2 i_2 - e_1 + r_3 i_3 + e_2$. Detta värde måste vara $= P$, varav ekvationen

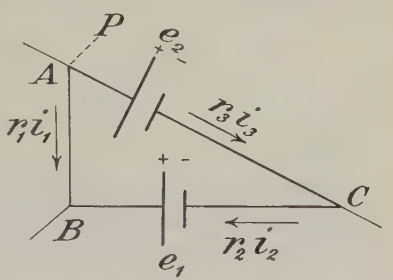


Fig. 1.

$$- r_1 i_1 + r_2 i_2 - e_1 + r_3 i_3 + e_2 = 0$$

För riktningarna av strömmar och obekanta elektromot. krafter kunna, därest inga särskilda föreskrifter finnas i problemen, godtyckliga antaganden göras. Äro dessa felaktiga, fås i svaren strömstyrkor och elektromotoriska krafter med negativa tecken.

Framställningsmetoden må till slut belysas med ett exempel.

Sex lika galvaniska element med elektromotoriska kraften e volt och stort inre motstånd, r ohm, äro delade på tre grupper. Den första gruppen innehåller 3 seriekopplade element, den andra 2 dylika och den tredje det återstående elementet.

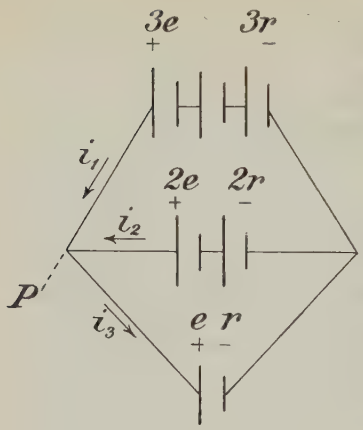


Fig. 2.

Gruppernas positiva ytterpoler äro förenade, likaså de negativa. Huru starka äro de strömmar, som gå genom de olika grupperna, och vilka riktningar ha de?

Fig. 2 åskådliggör kopplingsschemat och de för lösningen av problemet gjorda antagandena. *P* väljes som utgångspotential. Första ekv. framkommer vid gång genom grupp 2 och tillbaka genom grupp 1, den andra vid gång genom grupp 3 och tillbaka genom grupp 1. Således erhålles ekvationssystemet:

$$\left.\begin{aligned} 2ri_2 - 2e - 3ri_1 + 3e &= 0; \\ -ri_3 - e - 3ri_1 + 3e &= 0; \\ i_1 + i_2 &= i_3. \end{aligned}\right\}$$

Lösningarna bliva: $i_1 = \frac{5}{11}\frac{e}{r}$; $i_2 = \frac{2}{11}\frac{e}{r}$; $i_3 = \frac{7}{11}\frac{e}{r}$. Strömmarna gå alltså i de riktningar, som angivas av pilarna i fig. 2. (Problemet är valt som illustration till den framlagda metodiken men har givetvis ur reell synpunkt föga värde.)[1]

Torsten Wetterblad.

Apparat för demonstration av fasdifferenser.

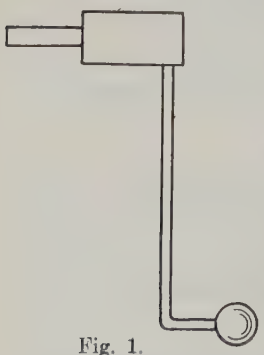


Fig. 1.

Ett i rät vinkel böjt och i ena ändan utblåst glasrör instickes i en kork, som förses med en axel passande till en rotationsapparat (fig. 1). Glasrörets kula (1—2 cm:s diam.) bestrykes med fluorescerande färg (sådan fås bl. a. hos Norstedt & Söner.)

Sättes apparaten i rotation, ser man i mörker en lysande ring eller, från sidan, en lysande linje, som representerar en harmonisk svängningsrörelse. Betraktar man denna linje i en roterande spegel, utdrages den till en sinuskurva. Instickes

[1] *Red.* har sedan många år de bästa erfarenheter av här beskrivna behandlingsmetod, som väsentligt underlättar problembehandlingen.

nu ytterligare ett likadant glasrör i korken, i t. ex. 90° vinkel med det förra, fås två sinuslinjer med 90° fasdifferens. Omedelbart före försöket böra kulorna belysas kraftigt.

Apparaten kan även göras av svartlackerade mässingstrådar (4—5 mm), ett grövre mässingsrör (vidd efter rotationsapparatens chuck) samt fluorescerande träkulor (enl. fig. 2.) Denna konstruktion tillåter förändring av fasvinkeln.

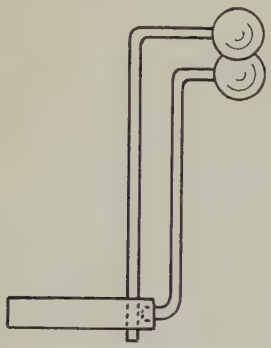


Fig. 2.

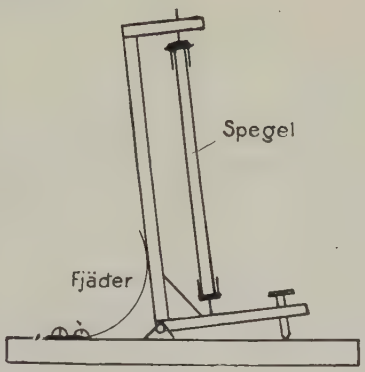


Fig. 3.

Ännu bättre verkan fås med små glödlampor. Lamporna kunna fästas å rör, som innesluta ledningarna. Batteriet kan anbringas på rotationsaxeln. Eller också kan man anordna en släpring; återledning genom axeln. Lämpligt som konstruktiv uppgift åt intresserad elev.

Saknas roterande spegel, kan man som bekant använda en större spegel (toalettspegel), som vickas fram och åter. Om man så vill, kan man lätt göra ett särskilt stativ till spegeln (fig. 3).

B. Berggren.

Bokanmälningar.

Handbuch der Physik. Band I: *Geschichte der Physik, Vorlesungstechnik*, Julius Springer, Berlin 1926, 404 sid., RM 33: 60.

Det till omnämnande föreliggande första bandet av den av GEIGER och SCHEEL utgivna *Handbuch der Physik* har ett för fysikläraren på alla stadier mycket värdefullt innehåll.

Professor HOPPE, Göttingen, inleder bandet med en 179 sidor stark översikt av fysikens historia intill 1895. Framställningen vittnar om en mindre vanlig beläsenhet och kritisk skärpa. Av stort intresse är förf:s klargörande av flera prioritetsfrågor. Exempelvis hävdas med eftertryck, att den gaslag, som tillskrives BOYLE och MARIOTTE, redan tidigare funnits av TOWNLEY och rätteligen borde benämnas TOWNLEYs lag.

I närmast följande kapitel giver professor SCHEEL, Berlin, förteckning över de viktigaste tidskrifter med fysikaliskt innehåll jämte deras i den fysikaliska litteraturen vanligen använda förkortade titlar samt över tidskrifter med refererande innehåll och tabellverk.

Forschung und Unterricht lyder överskriften till det av professor TIMERDING, Braunschweig, författade tredje kapitlet. Förf. redogör för i olika länder, speciellt i Tyskland, vidtagna åtgärder i syfte att gagna forskning och undervisning. Framställningens sista hälft berör vissa frågor av intresse för fysikundervisningens metodik.

Det sista och omfångsrikaste kapitlet är ägnat föreläsningstekniken och författat av d:r MECKE och d:r LAMBERTZ, Bonn. Ehuru det rikhaltiga urvalet av experiment inom fysikens alla områden (533 st.) närmast, som rubriken antyder, är avsett för föreläsningar, är det av mycket stort värde även för skolundervisningen. I inledningen påpekas, att intet försök är beskrivet, som ej på angivet sätt säkert kan utföras. Försöken äro omsorgsfullt beskrivna, uppgifter över dimensioner för apparatur och tillbehör lämnas. Texten beledsagas av enkla, överskådliga figurer, erforderliga formler, grafiska framställningar samt tabeller över viktigare till försöken hörande numeriska data (konstanter etc.). — Föreläsningstekniken, som väl fyller de anspråk man

kan ha på en modern handledning i fysikaliska experiments utförande, kan erhållas separat (RM 10: 80). Bandet i sin helhet, i varje fall dess sista del, bör icke saknas vid någon fysisk institution.

Torsten Wetterblad.

Kosmos, Fysiska uppsatser, Band 6. P. A. Norstedt och Söner (i distrib.), Stockholm 1928. 177 sid. Häft. 10 kr.

Sjätte bandet av Svenska fysikersamfundets årsbok börjar med trenne nekrologer över framstående vetenskapsmän. Fil. lic. F. THORÉN skildrar dissociationsteoriens grundläggare, SVANTE ARRHENIUS. Man får en tydlig föreställning om de svårigheter denne genialiske forskare hade att kämpa emot, hur han lyckades övervinna »auktoriteternas negativa inställning» och till slut fick mottaga alla de hedersbevisningar en samtid kan skänka en vetenskapsman.

Doc. TORSTEN HEURLINGERS tragiska livsöde behandlas av hans gode vän och medarbetare prof. E. HULTHÉN, som starkt framhåller HEURLINGERS sällsynta begåvning och stora betydelse för den moderna bandspektroskopien.

Den världsbekanta skaparen av kõldlaboratoriet i Leiden, KAMERLINGH ONNES, skildras av laborator B. BECKMAN, som på några sidor lyckats ge läsaren ett starkt intryck av den utomordentliga roll, som KAMERLINGH ONNES' laboratorium spelat i fysikens utveckling under de senaste fyrtio åren.

Bland uppsatserna nämnes i första rummet doc. G. ISINGS utmärkta, sammanfattande översikt av »C. T. R. WILSONS metod att synliggöra korpuskelbanor och några av dess tillämpningar». Doc. ISING skildrar först WILSONS grundläggande försök 1911, redogör sedan för hur metoden utvecklats och omnämner slutligen en mångfald fenomen vid vilka metoden med stor framgång kommit till användning. År 1925 lyckades man t. ex. fotografera atomsprängningar. En mängd fotografier visa frapperande bilder ur verkligheten. Bilder, som tydligt åskådliggöra metodens utomordentliga värde.

En annan mycket intressant, fastän för de flesta sannolikt rätt svårsmält uppsats är doc. I. WALLERS »Några drag ur den nyare kvantteorien». Doc. WALLER visar, hur ljuskvantaföreställningen uppkom, hur de kvantteoretiska metoderna utbildades och hur en tillfredsställande formulering av kvantteorien slutligen fordrade en betydligt mera genomgående brytning med klassiska föreställningar än man förut trott. Den dualism, som hittills varit kännetecknande för föreställningarna om ljusets natur, har nu även införts i beskrivningen av de materiella fenomenen.

Mycket värdefull är även laborator B. BECKMANs uttömmande skildring av metallernas supraledning, d. v. s. att det elektriska motståndet i en del metaller och metallegeringar plötsligt försvinner vid mycket låga temperaturer. Att ett magnetfält har samma inverkan på de supraledande metallerna som en uppvärmning och att de magnetiska övergångslinjerna uppvisa flera egendomligheter, synes vara lika svårt att tillfredsställande förklara som supraledningen själv. I uppsatsen äro en del teoretiska spekulationer i korthet refererade.

Bland de övriga bidragen märkes en uppsats av doc. ANDERS ÅNGSTRÖM »Om variationerna i atmosfärens temperaturstrålning och deras beroende av atmosfärens sammansättning», samt en redogörelse av fil. dr. H. BÄCKSTRÖM för hans egna undersökningar »rörande decimalskattning vid avläsning av skalor». Man fäster sig särskilt vid den egendomligheten, att varje person gör sig skyldig till systematiska fel vid decimalskattningen och att dessa systematiska felaktigheter äro konstanta under långa tider.

Lektor T. E. AURÉN redogör för undersökningar över den ultravioletta solstrålningen och uppvisar, att man först utanför atmosfärens gräns kan få ett verkligt »ultraviolettbad». De ultravioletta solstrålarna absorberas nämligen i hög grad av ett ozonskikt, som anses ligga 30 à 50 km över jordytan. Uppsatsen innehåller en mängd fakta samt beskrivningar över de experimentella anordningar, som användas för mätning av den ultravioletta strålningen.

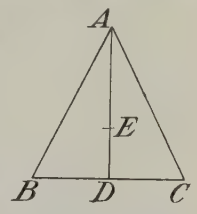
Det sagda torde visa, att sjätte bandet av Kosmos är mycket innehållsrikt och ovanligt givande i synnerhet ur lärarsynpunkt. Där finnas inga invecklade matematiska härledningar; de flesta uppsatserna äro sammanfattande översikter. För lärarna äro dylika översikter av mycket stort värde, därför att de själva ej hinna med och i många fall ej heller ha möjlighet att studera originalavhandlingar. Just nu då lärjungarna i gymnasiets och lyceets högsta klasser skola utföra enskilt arbete, varvid varje lärare är skyldig att lämna anvisning om litteratur, är det av fundamental betydelse, att det finns en svensk publikation att tillgå, som förmedlar en fortlöpande kontakt med framstegen inom fysiken. Varje bidrag, som kan hjälpa oss läroverkslärare att på ett tillfredsställande sätt lösa den svåra uppgiften, lärjungarnas enskilda arbete, mottages därför med tacksamhet.

C. Bergholm.

S. BÅGMAN, *Stereometri för realgymnasiet*, Albert Bonniers förlag, 1927, 57 sid., häft. kr. 1: 90.

Förf. anger i förordet, att »denna lärobok är att betrakta som ett försök att så tidigt som möjligt låta derivatbegreppet

komma till sin rätt». Redan i förut utgivna läroböcker i stereometri (ex. MATTSONs och SOLANDERS) användes detta begrepp för härledning av pyramidens volym jämsides med att andra metoder komma till användning. I föreliggande lärobok skulle det tidigare användandet av derivatan bestå däri att med dess hjälp härledes pyramidens volym och *därefter* det sneda prismats. Detta sker så, att efter pyramidens volym härledes på sedvanligt sätt den parallellt stympade pyramidens, varur prismats erhålles, genom att basytorna sättas lika stora. Ett sådant »bevis» är dock ej att rekommendera. Varthän ett dylikt resonemang kan leda må belysas av följande exempel. Den likbenta triangeln ABC (se fig.) med den variabla basen BC har fix tyngdpunkt E, oberoende av BC:s storlek. Går BC obegränsat mot noll, övergår triangeln till räta linjen AD, vars tyngdpunkt således ligger i punkten E! En annan sak är att påvisa, hur prismaformeln, härledd på annat sätt, kan fås som spec. fall ur formeln för den stympade pyramiden. Bättre är att efter satsen om pyramidens volym låta följa den enkla och stereometriskt givande satsen, att ett tresidigt prisma kan uppdelas i tre lika stora pyramider, varur formeln för prismat omedelbart härledes. Rättvisligen bör dock påpekas, att förf. som »annan härledning» hänvisar till denna sats, vilken ingår som led i en i läroboken upptagen bevisgång, som ej bygger på begreppet derivata. Av olika metoder för härledning av prismats och pyramidens volymer har anmälaren funnit den av förf. angivna derivatametoden bekvämast. Rent estetiskt kan det ju kanske stöta, att man först går fram ett stycke med prismat, sedan tar pyramiden och så till slut prismat i det allmänna fallet. Förf. anger emellertid också den bevisgången att efter härledningen av det raka prismats volym härleda det sneda med hjälp av derivatan.



Det största intresset beträffande föreliggande arbete knyter sig emellertid till det sätt, på vilket förf. sökt lösa den programpunkt, som är utsagd i företalet med orden »Antalet förberedande satser har reducerats». De metodiska anvisningarna, som finnas intagna i undervisningsplanen för gymnasiet den 30 april 1909, skola tillsvidare i tillämpliga delar äga giltighet även för de nya undervisningsplanerna. Dessa metodiska anvisningar föreskriva beträffande undervisningen i stereometri, att »de inledande satserna rörande räta linjer och plan böra genomgås med omsorg .... men vikt bör icke läggas på inlärandet av bevis för dessa satser». Att genomgå satserna med omsorg behöver ej

tvunget betyda, att man ger dem stränga bevis. En del bör kunna givas som erfarenhetssatser, vunna direkt ur åskådningen. Men de böra omnämnas och ställas in i sitt sammanhang för att användas, då det gäller bevis av efterföljande satser. En del mindre viktiga, som ej behövas för de övrigas skull, kunna helt utelämnas. Det är nu att observera, att en på detta sätt lagd lärogång icke utesluter användandet av en lärobok, där satsföljden är logiskt genomförd även med avseende på bevisen. En i det avseendet förträfflig och oöverträffad framställning hava vi i Mattsons lärobok i rymdgeometri (P. A. Norstedt & Söner, 1924). För en lärare med omdöme bör det ej vara svårt att gå förbi vissa satser, taga andra utan härledning och spara bevisen åt ett urval särskilt viktiga och ej av åskådningen omedelbart givna satser. Samtidigt är det då tryggt att kunna hänvisa till lärobokens fullständigare framställning, då det gäller lärjungar med ömtåligare logiskt samvete. Som särskilt fördelaktigt med en dylik anordning må framhållas, att den enskilde läraren har fria händer att i sitt urval följa sin egen smak samt klassens allmänna ståndpunkt och läggning. För en lärare, som fordrar en dylik rörelsefrihet kan det naturligtvis ställa sig rätt vanskligt, om det nämnda urvalet, såsom i Bågmans stereometri, är verkställd redan i läroboken.

Ett dylikt urval göres uppenbarligen i det vällovliga syftet att åstadkomma förenkling i framställningen. Efter vilken princip det har skett i Bågmans bok är emellertid ibland ej lätt att komma underfund med, i synnerhet som förf. ej själv gjort någon antydan härom. Ingenstädes nämnes, att åskådningen får ersätta ett utelämnat bevis. Satser med utelämnade bevis åtföljas vanligen av en hänvisning till exempelkapitlet, där satsens ordalydelse upprepas. Ang. satsen »Normalerna till ett och samma plan äro parallella», som meddelas utan bevis men återfinnes som övningssats 6 b, är att märka, att den ej kan bevisas, där den kommer i texten, utan förutsätter en senare bevisad sats (sats 4). I texten omnämnes däremot ej alls omvändningssatsen, som emellertid utgör grund för resonemanget om prismats höjd. Som synnerligen viktig (och det med rätta) har ansetts satsen om vinklar, vilkas ben äro parvis parallella och likriktade. Men den kan knappast anses viktigare eller mindre åskådligt påtaglig än satsen, att om två räta linjer äro parallella med en tredje, äro de sinsemellan parallella. Denna sats, som ej med ett ord finnes omnämnd varken i texten eller bland övningsexemplen, men utan vars giltighet prismadefinitionen ramlar, riktar lärjungarnas uppmärksamhet på det förhållandet, att plangeometriska satser ej utan vidare låta sig generaliseras att gälla

i rymden. Bland andra satser, som ej alls omnämnas men förutsättas i vissa utredningar, upptagas här: »Vinklarna mellan en rät linje och parallella plan äro lika stora» (spec. fallet 90° i övn. ex.). »Parallella linjer bilda lika stora vinklar med ett och samma plan» (spec. fallet 90° i övn. ex.). En del bevis tycks ha utelämnats, emedan de ansetts för besvärliga, t. ex. bevisen till satserna om det reguljära *n*-sidiga hörnet sid. 13.

Med det anförda har anmälaren velat rikta uppmärksamheten på att läroboken ej uppvisar önskvärd fasthet i den geometriska satsfogningen. Det förefaller emellertid som om förefintliga brister härutinnan skulle i det stora hela kunna hävas utan någon mera genomgripande omredigering. Detta sagt, för den händelse förf. i en ev. ny upplaga skulle finna lämpligt beakta här anförda synpunkter.

Till ovan framställda principanmärkningar fogas här en detaljkritik av mer eller mindre väsentlig art, som kanske kan bliva till nytta vid en blivande omredigering. Ett par vändningar skulle anmälaren vilja ha utbytta mot andra som bättre motsvara meningen: »Oändligt förlängda, aldrig råkas» (sid. 7) mot »aldrig råkas, hur långt de än utdragas»; »Vi få vidare» (sid. 33) mot »Härav fås». I fallet b) av sats 6, sid. 12 förenklas beviset avsevärt, om projektionsplanet flyttas till punkten M. Def. på ett konkavt hörn bör förtydligas med tillägget, att kantvinklarna skola ses från en punkt inuti hörnet. Å sid. 18 är $AB \ A_1B_1$ motiverat (enl. 3 b), men ej $DE \mid D_1E_1$. Då en sats skall bevisas, bör *först* förutsättningarna preciseras. Vid härledningen av pyramidens volym sid. 20 meddelas ej alls, att höjden förutsättes falla ej utanför pyramiden, och antagandet, att pyramiden har konkava vinklar, meddelas först ett stycke in i utredningen. Vid behandlingen av sfären bör främst nämnas dess egenskap av ort.

Boken avslutas med övningsexempel. I ex. 33 talas om en regelbunden pyramid med rektangulär basyta, vilket innebär en motsägelse. Övningsuppgifterna äro väl valda och meddelade i metodiskt genomtänkt ordning. En del exempel äro riktigt fina.

Hjalmar Olson.

Karl Tham, *Plangeometri* (Euklides' sjätte bok), 6:e uppl., C. E. Fritzes förlag, Stockholm 1928, 68 sid., kr. 1: 75.

Denna välkända lärobok, förut benämnd *Proportionslära med tillämpning på plangeometrien*, har, såsom titeländringen och förf:s förord angiva, i sin sist utgivna upplaga undergått flera förändringar.

Proportionsläran har kraftigt beskurits och framställningen

såväl där som i själva plangeometrien moderniserats. En sådan formulering som exempelvis: Förhållandet mellan två rektanglar är »sammansatt av deras basers och höjders förhållanden» är ändrad till »lika med produkten av deras basers och höjders förhållanden» o. s. v.

I själva plangeometrien äro några oviktiga satser strukna. I stället ha tillkommit harmonisk delning av en sträcka samt den harmoniska cirkeln på grundval av bissektrissatserna. Önskvärt hade varit, att även andra metoder för harmonisk delning intagits, åtminstone bland övningsuppgifterna.

En annan viktig förändring är införandet av ett kapitel om konstruktion av algebraiska uttryck, slutande med »gyllene snittet». Tyvärr saknas dess tillämpning å regelbundna 10-hörningen. — I detta kapitel träffar man ett par tryckfel, det mest störande i ex. 1 sid. 39, där rotmärket även skall sträcka sig över nämnaren.

I kapitlet om likställda figurer har förf. utan fog, synes det anmälaren, strukit satsen om att rätliniga likformiga figurer kunna likställas med avseende på vilken punkt som helst.

Boken slutar med en betydligt utökad samling aritmetiska och geometriska övningsexempel. Räkneexemplen äro som förut försedda med svar; de i föreg. uppl. intagna anvisningarna till lösning av en del geom. övningsuppgifter saknar man däremot i 6:e upplagan.

Joh. P. Pettersson.

GUSTAV ERIKSSON, *Lärobok i sannolikhetskalkyl för läroverken*, Uppsala 1928, Almqvist & Wiksell (i distrib.), 30 sid., häft. kr. 0,85.

Förr i världen innehöllo våra svenska läroböcker i algebra även en del kombinatorik och sannolikhetsräkning. Detta kursmoment är nu åter kommet till heders genom de nya bestämmelserna. För de lärare, som snart ha att taga itu med undervisningen på ifrågavarande gebit, är säkerligen ovanstående arbete välkommet. Så småningom kommer väl det nya stoffet att åter inarbetas i algebraläroböckerna. Mycken tid står i varje fall ej till förfogande för denna nya »disciplin». Med fullt fog har förf. därför inskränkt sig till en koncis, begreppsmässig och systematisk framställning av de viktigaste grundläggande def. och satserna; för ev. »mera intresserade lärjungar» finnas dessutom tre §§ om relativ sannolikhet, matematisk förväntan och spelteori. Nybörjaren har naturligtvis lätt att finna en sådan framställning en smula torr och monoton, men förf. har sörjt för lämplig omväxling genom en del exempel i texten och dessutom

genom 39 väl valda övningsuppgifter. Intresseväckande skulle kanske ock några små notiser om prob. kalkylens tillämpningar (statistik, försäkringsmat., felberäkning) ha varit, likaså några historiska data. Moderna läroböcker bruka ju innehålla sådant. Några ord om BERNOULLIS teorem i § 6 skulle givit förf. möjlighet att ytterligare kännetecknа den matematiska förväntan i § 9 som genomsnittsvinsten vid stort antal partier; nu kallas denna förväntan medelvärde av helt formella skäl (13). Förf. har emellertid föredragit att ej medtaga annat än sådant, som från botten utredes i arbetet.

I ekv. (6) sid. 11 vore väl

$$1 - \frac{\binom{n-l}{v}}{\binom{n}{v}}$$

ett enklare uttryck för den sökta sannolikheten.

Om $\binom{n}{o} = 1$ definierats i § 2, kunde man sätta $k = o$ i (5). Denna symbol behövs ock i (5) för $l > v = k$. Fallen $v - k > n - l$ i (5) och (6) uteslutas ej genom restriktionerna i valet av k och leda även till odefinierade symboler. Ehuru av mindre praktiskt intresse kunde denna möjlighet kanske beaktats. I (6) betyder k största möjliga, i § 3 för övrigt ett godtyckligt bland de tillåtna talen.

I allmänhet är det bäst om svar angivas exakt (d. v. s. ej med närmevärden enbart), där så ske kan. Eljest bör den norm angivas efter vilken avrundningen skett. Någon objektiv sådan finnes ju ej. Så hade det varit bättre om svaret till ex. 11 skrivits $\frac{12\,683}{2 \cdot 10^6}$ i st. f. 0,006340, även om sista siffran varit riktig.

Det synes mig för tidigt att försöka närmare ingå på satsernas omfång och formulering, varianter av bevis, problemens svårighetsgrad (härvidlag spelar ju arten av de uppgifter i studentskrivningarna, som komma att beröra denna del av kursen, en viktig roll) m. m. Sannolikheten *a priori* att träffa det riktiga härvidlag bör stå tillbaka för sannolikheten *a posteriori*, som fotar på vunnen erfarenhet. Vid dennas insamlande bör förf:s väl genomtänkta program utan tvivel kunna vara en värdefull vägledare.

Josef Andersson.

Gradualavhandlingar.[1]

HUGO SEBELIUS, *Zur Kenntnis der Laktone, namentlich ihrer Hydrolyse.* Lund 1928, 238 sid. Disp. i Lund 5 maj 1928. Opponenter: Docent OTTO STELLING och amanuens TORE WIDHE.

Vid de undersökningar, som HJALMAR JOHANSSON företog med de av honom upptäckta enkla β-laktonerna, fann han, att dessa beträffande den sura hydrolysen förhöllo sig helt olika mot de vanliga karbonsyreestrarna. β-laktonernas hydrolys visade sig ej röna något inflytande av vätejoner. Däremot kännetecknas γ-laktonernas hydrolys av en typisk vätejonkatalys, vilket JOHANSSON och förf. senare visade. I glykolid och laktid, således en annan typ ringformiga estrar, funno vi vidare kroppar, vid vilkas hydrolys samtidigt med den vätejonkatalyserade reaktionen en starkt framträdande okatalyserad reaktion ägde rum. Förf. har nu fortsatt undersökningarna över laktonernas hydrolys och framför allt utsträckt dem till att omfatta δ- och ε-laktoner. Därvid visade det sig nödvändigt att underkasta framställningsmetoderna för laktoner en ingående granskning, och en del nya, i stort sett goda reaktionsvägar ha prövats. Avhandlingen är därför uppdelad i en preparativ och en kinetisk del. Sex av de undersökta δ-laktonerna voro ej förut kända.

I den kinetiska delen behandlas först vad som förut var känt om laktonernas hydrolys. Därefter framlägges det nya kinetiska försöksmaterialet: jämviktsbestämningar (lakton $\rightleftarrows$ oxisyra) under olika betingelser, hydrolyshastighetsmätningar i sura och alkaliska lösningar (i några fall vid närvaro av neutralsalt), autokatalysförsök, m. m. Försöksmaterialet hänför sig huvudsakligen till laktoner med större ringar, då detta område hittills var så gott som obearbetat. Slutligen diskuteras bl. a. ringstorlekens inflytande på hydrolysens art.

CARL SCHALÉN, *The space distribution of B and A type stars in bright and dark galactic regions. Researches based on determinations of spectral type and luminosity class for 4300 stars.* Uppsala 1928, 126 sid. (Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar, Tredje serien, Band 6, n:r 6). Disp. i Uppsala 1 dec. 1928. Opponenter: Professor KNUT LUNDMARK och fil. lic. YNGVE ÖHMAN.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande författares egen hand.

Inom den moderna stellarastronomien spelar klassifikationen av stjärnornas spektra en betydande roll. Det fundamentala verket på detta område är den stora »Henry Draper-katalogen», utgiven från Harvard-observatoriet och omfattande c:a 225 000 stjärnors spektra. Beteckningarna för de viktigaste spektraltyperna äro B, A, F, G, K och M, från de hetaste blåvita och vita B- och A-stjärnorna till de svalaste röda M-stjärnorna.

Vid Uppsala observatorium ha under de senaste åren omfattande studier och klassifikationer av stjärnspektra utförts, delvis efter andra grunder än i Harvard. Sålunda söker man att inom varje särskild spektraltyp åtskilja stjärnor av olika lyskraft med tillhjälp av egenskaper hos vissa linjer och spektralgebit, vilkas utseende eller intensitet variera med stjärnans lyskraft. De metoder, som härvid begagnas, ha utarbetats av professor BERTIL LINDBLAD. »Absoluta magnituden», som är ett mått på lyskraften, har man även sökt bestämma för olika typer av stjärnor.

Den avhandling, varom här är fråga, grundar sig på ett material av korta objektivprismspektra för omkring 4300 stjärnor av spektraltyperna B och A, belägna inom fyra olika trakter av Vintergatan. Med den äldre astrografen i Uppsala (med objektivprisma), vars objektivöppning är 15 cm och brännvidd 150 cm, når man med 40 minuters exponering stjärnor av skenbara storleken 10,5. Med stjärnor, som ha den högsta lyskraften (till vilka B- och A-stjärnorna höra), når man därför avstånd av minst 15 000 ljusår.

Ändamålet med den föreliggande undersökningen var ej ett närmare studium av alla dessa stjärnors spektra utan i stället att på statistisk väg undersöka B- och A-stjärnornas fördelning i rymden. De utvalda Vintergatsområdena omfatta såväl ljusa som mörka partier. Genom en jämförelse av stjärnantalens eller bättre stjärntäthetens variation med avståndet i ljusa och mörka områden är det möjligt att beräkna avstånd och absorption för de mörka nebulosor, som med största sannolikhet äro orsaken till de mörka trakterna. Sålunda finner förf. i Svanens stjärnbild en mörk nebulosa på ett avstånd av 800 parsec = 2 500 ljusår; i Cepheus finnes en ganska närbelägen nebulosa på 1 200 ljusårs avstånd och en annan bakom denna på 2 500 ljusår. I Cassiopeia har förf. härlett avståndet till en nebulosa på omkring 3 000 ljusårs avstånd, medan i Kusken mot Oxens stjärnbild finnes en närbelägen nebulosa på blott 400 ljusårs avstånd. Alla dessa mörka nebulosor absorbera 1—2 storleksklasser av stjärnljuset. De mörka nebulosornas inflytande på stjärnfördelningen är mycket slående och visas i tabeller och figurer. Detta detaljerade

studium av stjärnfördelningen i vintergatsbältet är av vikt för vår kännedom om stjärnsystemets struktur.

Förf. undersöker det stora stjärnmolnet i Svanens stjärnbild och finner ett avstånd av omkring 3500 ljusår.

De typer av stjärnor, som förf. studerar, visa en stark koncentration mot Vintergatans plan. Förf. söker, genom jämförelse med områden belägna längre bort från detta plan, uppdraga linjerna för konstant täthet. Lagren för konstant stjärntäthet visa en tre à fyra gånger så stor utsträckning nära Vintergatans plan som vinkelrätt däremot. Vidare studeras linjerna för konstant stjärntäthet i Vintergatsplanet. Dessa linjer synas bekräfta det antagandet, att solen är belägen excentriskt i det stora systemet och att centrum är beläget mot Skyttens stjärnbild.

Slutligen studerar förf. även bl. a. frekvenskurvan för luminositeterna (lyskraft) för A-stjärnorna i de olika områdena och finner, att dessa kurvor icke synas variera med avstånd och riktning. Frekvenskurvan kan betraktas som sammansatt av två normala felkurvor i överensstämmelse med de resultat MALMQUIST funnit ur annat material.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årg. XL, 1928, häft. 11 o. 12; årg. 1929, häft. 1 o. 2.

Ur innehållet i n:r 11: BERTIL ENGLUND, Om inverkan av flervärdiga alkoholer och fenoler på arsenikföreningar. — Referat och översikter. Ur n:r 12: K. JOSEPHSON, Nobelprisen i kemi för 1927 och 1928. — BROR HOLMBERG, Pseudokumolderivat ur rå träsprit. Ur n:r 1: KARL MYRBÄCK, Co-zymas i jäst, dess extraktion och rening. — E. HÄGGLUND o. T. JOHNSON, Über die Veränderung der Zuckerarten im Verlaufe der Sulfitzellstoff-Kochung. — H. v. EULER o. H. HELLSTRÖM, Über die Verbindungen von Sb Cl_3 und Sn Cl_4 mit ungesättigten Kohlenwasserstoffen. — Sveriges produktion av kemiska produkter m. m. 1927. Ur n:r 2: KARL JOSEPHSON, Nya resultat inom kolhydratkemien. — I alla numren Meddel. från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Vetenskapen och livet. Årg. XIII, häft. 11. o. 12; årg. XIV, 1929, häft. 1 o. 2. Kr. 1: — per häfte om 48 sid., kr. 10: — per år (12 häften).

Ur innehållet i n:r 11: Fotografiens användning för kartläggning. — Kvävets uppgift i jordbruket. — Legeringars struktur

m. m. Ur n:r 12: Moderna flygplan. — De kemiska industriella synteserna. — Platina. — Teleautografen. — Ur n:r 1: Elektrisk gasrening. — Färgfilmen. — Outnyttjade energikällor. — Hur man gör ett torrelement. Ur n:r 2: Vad är frekvens? — Elektriska fonografer. — Notiser om uppfinningar och upptäckter. — Nya patent.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. I 1928, häft. 12 (dec.); årg. II. 1929, häft. 1 (jan.) o. 2 (febr.) Pris: se annons i detta nummer.

Ur innehållet i n:r 12: Rundradiomottagare för nätanslutning. — Vad kostar god belysning?. — Nyheter under rubrikerna: Installationsväsen, Era i hemmet, Elektromedicin, Ljuskultur etc. Ur n:r 1: Helautomatisk likriktareanläggning vid Malmö elektricitetsverk. — Hammarforsens kraftverk. — Reparation av säkerhetsproppar. — Det moderna elektriska köket. — Ur n:r 2: Finlands vattenkraftindustri. — Spänningsskydd vid nätmottagare.

Industritidningen Norden. Organ för industri, byggnadsväsen, uppfinnarverksamhet och med dessa ämnen sammanhörande allmänna intressen; utgives i Stockholm varje helgfri onsdag. Helt år (posten) kr. 12: —.

Ur innehållet i häft. 1—10, årg. 1929: F. FRANSSON, Televisionens teknik. — Telefonkabeln Sverige-Finland. — J. HÄRDÉN, Perpetuum mobile. — De svenska storvarven under 1928: Götaverken, Lindholmens verkstad. — Nya vägar i fysiken. — C. E. SVALA: Fjärrmanövrering av vattenkraftmaskiner. — Teknisk användning för gaserna krypton och xenon. — Uppsatser om uppfinnarverksamheten och vetenskapen av Axel F. ENSTRÖM och C. A. HULT. — Ny metallsmältningsmetod. — Dessutom beskrivningar av nya patent och uppfinningar. Såsom bilaga till varje nummer medföljer Svensk tidskrift för industriellt rättsskydd, patent m. m.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1928, 4 Hefte.

Ur innehållet i den elementära avd. A. EINAR TORSTING, Matematiken i det matematiske Gymnasium. — FR. FABRICIUS-BJERRE, Rentesregning for Gymnasiet. — ERIK JUUL, Primtal og sammensatte Tal. — H. J. PIHL, Om en trekants medianer. — Danske Eksamensopgaver. Ur innehållet i den vetenskapliga avd. B: Uppsatser av T. BONNESEN: Lineære Aproksimationer, Bundne Ekstremer, Om ERIK SCHOU og hans matematiske Arbeider.

— J. FAVARD, Sur les inégalités de la théorie des fonctions harmoniques.

Fysisk Tidsskrift. Udgivet af Selskabet for Naturlærens Udbredelse. Aarg. 1928, 4, 5 og 6 Hefte.

Ur innehållet i n:r 4: NIELS BJERRUM, Udviklingen af vore nuværende Anskuelser om Saltenes natur. — INGOLF SESTOFT, (Forts.) Om Aerologi og Aeronautisk Meteorologi. — A. NIELSEN, Historiske Røntgenrør. — Danske Eksamensopgaver med Løsninger. *Fysik i Skolen:* A. MENZINGER, Omvendning af LEIDENFROSTs Forsøg, Forsøg over Varmestraaling. — OTTO LARSEN, Om Billeddannelse ved Brydning. Ur n:r 5: Referat af Prof. J. N. BRØNSTEDTs Foredrag i Anledning af Modtagelsen af H. C. ØRSTED-Medaljen (Om komplekse Metalammoniakforbindelser). — VIGGO LAURSEN, Erobringen af det yderste ultraviolette Spektralomraade. *Fysik i Skolen:* P. J. PEDERSEN, Et Magnetfelts Indvirkning paa en Strømleder. Ur n:r 6: J. C. JACOBSEN, Nyere Undersøgelser over de radioaktive Stoffers Omdannelser. *Fysik i Skolen:* CHR. JENSEN, 1. WILSONs Forsøg 2. Forsøg over »Gnidning» mellem Elektricitetsbærere og det omgivende Stof. 3. Forsøg over Selvinduktion. — P. JØRGENSEN, WULLFs WILSON-apparat. — J. K. ERIKSEN, En Elevøvelse med Glimlampen. — Danske Eksamensopgaver.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Organ for Norsk Matematisk Forening. Årg. X, 1928, h. 1—4.

Utkommer årligen med 4 häften à 42 sid. *Redaktörer:* FR. LANGE-NIELSEN og OLAV THALBERG. Abonnemang genom kaptein O. KALLAGER, De norske livsforsikringsselskabers statistiske kontor, Torvet 5[5], Oslo. Innland kr. 5; —, utland kr. 6: — pr. år.

Ur innehållet i n:r 1: OLE PEDER ARVESEN, Om grundlæggelsen av den deskriptive geometri ved MONGE. Ur n:r 2: KAY PIENE, Abstrakt matematikk, virkelighetsmatematikk og skolematematikk. — TH. SKOLEM, Uber die Lösung der unbestimmten Gleichung $a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 = 0$ in einigen einfachen Rationalitetsbereichen. Ur n:r 3: ØYSTEIN ORE, Om RICHARD BIRKELAND og hans videnskapelige arbeider. — ALF GULDBERG, Litt om hele transcendente funksjoner. Ur n:r 4: TH. SKOLEM, Über die mathematische Logik. — Dessutom förekomma i alla nummer läsvärda bokanmälningar av i huvudsak utländsk matematisk litteratur, examensuppgifter (Universitetet och Norges tekniske høiskole), matematiska uppgifter med lösningar och särskilda prisuppgifter för gymnasieelever.

Den høiere Skole. Organ for Filologenes og Realistenes Landsforening. Årg. XXX, 1928, h. 1—20; 798 sid.; årg. XXXI 1929, h. 1—3. Abonnemang (6 kr: — per år) genom *Steenske Forlags Tidsskriftsekspedisjon*, Kirkegt. 15, Oslo. *Redaktör:* Lektor I. A. Refsdal. Oslo.

I årg. 1928 förekomma följ. artiklar av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll: Bent Vale, Litt mekanikk (n:r 1). — Kay Piene, Matematikken på de sproglige linjer (n:r 3). — Rich. Krekling, Elektriske svingninger og kobling av kondensatorer (n:r 8). — K. E. Sparre, Om bestemmelse av maksimum og minimum (n:r 14). — Olav Ingebrigtsen, Den almindelige annengradsligning i analytisk geometri (n:r 19). — Dessutom bokanmälningar samt norska, danska och svenska examensuppgifter.

Kataloger m. m.

P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning. Firman, som under en följd av år utgivit en rad värdefulla meddelanden om fysikalisk undervisningsmateriell och anvisningar angående deras bruk, har nu utsänt första numret av en ny serie, *Ny Undervisningsmateriell*, avsedd att ge kortare meddelanden ang. materiell för de olika undervisningsgrenar, firman representerar. Under rubriken *Matematik* finner man uppgifter om ny räknemateriell, avsedd för de fyra första skolåren och ordnad av rektor C. G. Hellsten. Även den som ej sysslar med den grundläggande räkneundervisningen har intresse av att taga del av denna välordnade samling. Materiellen för yt- och rymdberäkningar torde särskilt uppmärksammas; de ha betydelse även för läroverkens lägre klasser. En detaljerad särprislista över denna räknemateriell finnes att tillgå. Under rubriken *Fysik* meddelas bl. a. upplysningar om nya modeller av dieselmotor och av vattenturbiner samt om ett rikhaltigt urval av nya projektionsapparater (En sektion av firman Liesegangs *Novo-Trajanus-Epidiaskop* återfinnes i annons i detta häfte). — I broschyren *Teknologiska samlingar och planscher* (1928) beskrivas en del standardsamlingar återgivande de olika stadierna vid förädling av diverse råämnen, framställning av metaller och deras bearbetning, fabrikation av gummi, glas, papper m. m.; dessutom en del planscher över industriella processer. — Specialkatalog över *Skioptikon- och episkopbilder*, 1929, 96 sid.

Skolradio. Vid högre allm. läroverket å Östermalm i Stockholm pågå sedan någon tid försök med skolradio, vilka utfallit mycket bra. Ett lämpligt rum för mottagning, rymmande 150

elever, har erhållits genom avskärmning medelst draperier av ett område i skolans aula. Härigenom har man erhållit mycket goda akustiska förhållanden, vilket som bekant är en nödvändig — ehuru ofta förbisedd — betingelse för ett gott resultat. I detta rum samlas de klasser, vilka för dagen skola åhöra radioutsändningarna.

Man har även installerat en radiomottagare (levererad av *Nordiska Radiofabriken*, Nybrogatan 8, Stockholm), som fungerar mycket bra, och som dessutom har den stora förtjänsten att vara billig. Apparaten är en fyrarörs, motståndskopplad nätanslutningsapparat (inga batterier) med elektrodynamisk högtalare; pris för hela utrustningen kr. 290: —. Firman tillverkar även en mindre apparat (3-rörs, för nätanslutning till 110 el. 220 volt likström och med inbyggd högtalare, pris med lampor kr. 125: —), vilken är fullt tillräcklig även för ett stort klassrum. Verkställda prov ha visat, att även denna återger såväl tal som musik mönstergillt; den torde gott kunna mäta sig med och även överträffa åtskilliga avsevärt dyrare apparater. — Mottagare för anslutning till växelströmsnät väntas bli färdiga till hösten.

Rationell belysning. Man har under senare år genom systematiska undersökningar fastslagit det stora inflytande, som en tillräcklig och ändamålsenligt anordnad belysning har på den arbetandes välbefinnande och arbetsresultat. Nästan varje större belysningsfirma har numera sin särskilda avdelning för »ljuskultur» och utger broschyrer om »rationell belysning». Ett par dylika, utgivna av Asea och Elektraverken ha tidigare refererats i tidskriften. Nu senast har red. mottagit prospekt och diverse broschyrer från firman *Elektro-Star* (Tunnelgatan 20 A, Stockholm), vilka förtjäna beaktande. Firman representerar den danska s. k. P. H.-lampan, som på sistone låtit tala om sig rätt mycket i fackpressen (se t. ex. Teknisk Tidskrift, okt. 1928). Man har ju sökt åstadkomma en bländfri belysning, dels genom indirekt belysning, dels genom att omge ljuskroppen med mattglas, opalglas el. dylikt. I förra fallet förlorar man energi vid reflexionen mot tak eller andra dåligt reflekterande ytor, i det senare genom absorption. I P. H.-lampan riktas ljuset från glödlampan på fördelaktigt sätt medelst glasreflektorer med hög reflexionsförmåga (se firmans annonssida i detta häfte); en mindre del passerar glaset och sprides diffust. Belysningen blir bländfri och ljusekonomien synnerligen god.

Vid högre allm. läroverket å Östermalm har dylik armatur inmonterats i gymnastiksalen, två större skrivsalar och några klassrum. I den ena skrivsalen ($10{,}5 \times 13{,}3$ m^2) erhölls med 600 watt,

fördelade på 6 ljuspunkter, en medelbelysning av 38 lux mot resp. 960 watt och 25 lux vid den äldre belysningen. En provbelysning i ett klassrum vid Nya Elementarskolan gav med P. H.-armatur vid 300 watt fördelade på 4 ljuspunkter en synnerligen jämn belysning om 36 à 38 lux. Till jämförelse må meddelas, att en i fjol inmonterad, bländfri armatur — genomskinligt opalglashölje — för samma wattförbrukning och lika placerade ljuspunkter endast ger 20 à 22 lux. Alla de nu nämnda siffrorna hänföra sig till gasfyllda glödlampor och belysningen på arbetsborden. Inom parentes kan omnämnas, att en äldre armatur, som ännu förekommer i de flesta klassrum vid Nya Elementarskolan (halvmatta, dammsamlande skålar), ger med lufttomma lampor vid 300 watt och 5 ljuspunkter endast 11 à 14 lux, som måste betecknas som en otillräcklig belysning; skolöverstyrelsen anbefaller 25 lux, som nog får anses som en minimisiffra.

Det system P. H.-lampan representerar, synes alltså ge en synnerligen god ljusekonomi. Men en nackdel är denna lamptyps höga pris, vilket gör att den medför en verklig ekonomisk fördel endast vid ett tillräckligt antal årliga brinntimmar — antalet lätt att i varje fall beräkna. Vid stor brinntid överväger naturligtvis strömbesparingen, och vinsten blir avsevärd.

Med dessa rader om en intressant belysningsteknisk nyhet har red. velat rikta uppmärksamheten på belysningsproblemet överhuvud och särskilt på belysningen i våra skolor. Det skulle säkert vara en tacksam uppgift för vederbörande fysiklärare att sätta sig in i dessa frågor. Därvid borde början göras med en undersökning av den belysning, som finnes. Små lätthanterliga belysningsmätare finnas att tillgå i handeln (eller kunna event. lånas hos någon belysningsfirma). Vid ovan omtalade mätningar ha använts en luxmätare av PHILIPS (50 kr.) och en av OSRAMS (80 kr.) fabrikat. De äro båda byggda enl. principen för Bunsens fotometer med en liten glödlampa — matad med konstant ström från ett torrelement — som fotometerlampa. I den förra hålles strömmen konstant medelst ett seriekopplat järnmotstånd, i den senare regleras spänningen på lampan och kontrolleras med hjälp av en liten voltmeter. Vid O:s mätare ändras fotometerlampans belysning av »fläcken» medelst en vridbar, graderad bländare. I P:s apparat finnes en rad, olika belysta »fläckar»; siffran vid den fläck, som försvinner, anger belysningens storlek. Graderingen, som i båda fallen är empirisk, tillåter direkt avläsning i lux (= belysningen på en meters avstånd från ett normalljus vid vinkelrätt infallande ljus).

Närmare upplysningar om dessa belysningsnätare kunna erhållas genom firmornas broschyrer.

Philips. I septembernumret 1928 omnämndes firmans nya transportabla röntgenutrustning (med metallröntgenrör) för direkt nätanslutning. De yttre konturerna av denna apparatur återfinnas å firmans annonsblad i detta nummer. — Bland firmans nyheter märkes en hållbar pol- och spänningsprovare — ett i bakelit inbyggt neonsignalrör — som kan användas för spåningar från 150 volt likström eller 110 volt växelström upp till 750 volt.

A.-B. Kemiska Apparater, Blasieholmstorg 14, Stockholm, har insänt katalog (75 sid.) och prislista över laboratorieutensilier, upptagande alla vanliga apparater och förbrukningsartiklar. Enl. meddelande tillverkar firman därutöver å eget glasblåseri allt inom branschen, varvid hänvisning till andra kända kataloger kan göras. Nytillverkning och omformning av platinaföremål utföras i eget smältverk.

Insänd litteratur.

Tidskrift utgiven av Pedagogiska föreningen i Finland. Årg., 1928, h. 5—8, 1929, h. 1—2.

Pedagogisk Tidskrift, 1928, h. 9 o. 10, 1929, h. 1 o. 2.

Gradualavhandlingar, tidskrifter och kataloger (se under vederbörande rubriker).

Elis Hjalmar, *Handledning i laborationer*, för realskolans lägsta klasser, Magnus Bergvalls förlag, Stockholm 1928, 26 sid., häft. 90 öre.

Gustav Eriksson, *Laborationer i matematik* jämte praktiska konstruktions- och mätningsuppgifter för realskolan. Almquist och Wicksell (i distribution), 25 sid., häft. kr. 1: —.

Svenska Elektricitetsverksföreningens Handlingar 1928. N:r 17. Spänningar för distribution av elektrisk energi i svenska städer, köpingar och större samhällen. C. E. Fritzes bokhandel i distribution, Stockholm 1929, 68 sid., häft. kr. 4: —.

Ruben Mattson. *Lärobok i algebra för gymnasiet*, del III, andra omarbetade uppl. P. A. Norstedt & Söners förlag (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1928, 103 sid. jämte svar, 30 sid., kart. kr. 2: 90.

Tom Moll, Lärobok i fysik, del V, dynamik, åttonde uppl. omarbetad av Ture Rudberg. Svenska Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1928, 66 sid., klotband kr. 1: 55.

Hjalmar Olson, *Sannolikhetskalkylens första grunder*. Svenska Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1929, 23 sid., häft. 75 öre.

H. Fenkner — Karl Holzmüller, *Geometri* I (13 Aufl.) für die Mittelklassen. Verlag Otto Salle, Berlin 1929, 318 sid., RM 6: 40.

H. Wieleitner, *Mathematische Quellenbücher IV, Infinitesimalrechnung*. Verlag Otto Salle, Berlin 1929, 160 sid. RM 4: 50.

Alfred Pettersson, *Luften och klimatet samt deras inverkan på människan*. I serien Bonniers små handböcker i vetenskapliga ämnen, Stockholm 1928, 107 sid., häft. kr. 2: 75.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

317) Visa, att

$$149 - 48\sqrt{6} - 36\sqrt{3} + 24\sqrt{2}$$

är en jämn kvadrat.

318) En cirkel genom brännpunkterna F_1 och F_2 till en hyperbel skär kurvan i P och konjugataxeln i Q. F och Q ligga på samma sida om den reella axeln. Från P dragas linjerna PR_1 och PR_2 parallella med QF_1 och QF_2. R_1 och R_2 ligga på reela axeln. Visa, att R_1R_2 har konstant längd, hur cirkeln än väljes. *X.*

319) Att upprita en triangel, då man känner summan av två sidor samt höjden och medianen från den gemensamma vinkelspetsen. *Iter.*

320) Att upprita en triangel, då man känner läget av två höjders fotpunkter samt vet, att den sidan, mot vilken den tredje höjden svarar, ligger utefter en given obegränsad rät linje.
C. A. Mebius.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

321) Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5z \\ x^2 + y^2 &= 13z^2 \\ x^4 + y^4 &= 97z^2 \end{aligned}\right\}$$

Svar:

x	3	2	-3	-2	0
y	2	3	-2	-3	0
z	1	1	-1	-1	0

322) α, β och γ äro en triangels vinklar. Visa, att triangeln är rätvinklig, om $\sin\alpha - \cos\beta = \cos\gamma$.

323) I en cirkel med radien 5 cm har man dragit en korda $AB = 5$ cm och förlängt denna åt B till ett stycke $BC = 9$ cm. Från C drages en sekant CDE, så att bågen BD blir hälften av bågen AE. Beräkna vinkeln ACE. Svar: $17^\circ,08$ eller $42^\circ,92$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

324) Diskutera kurvan $y = x^5 - 5x^3 + 10x$.

325) En kub och en rät pyramid stå på samma bas och åt samma håll. Hur stor skall pyramidens höjd vara, för att pyramidens inom kuben belägna del skall utgöra 52 % av kubens volym? Kubens kant $= a$. Svar: $\frac{5}{3}a$.

326) Att parallellt med basen i en triangel draga en transversal, så att det uppkomna paralleltrapetset blir medelproportional till den ursprungliga triangeln och topptriangeln.

Lösningar till uppg. 297—300.

297) *Ett helt tal består av 6n siffror. I var och en av de på varandra följande grupperna av 6 siffror angiva de 3 första siffrorna samma tresiffriga tal som de 3 sista. Ett sådant tal är jämnt delbart med 7, 11 och 13.* *C. A. Mebius.*

Ett sådant tal kan skrivas

$$n + 10^3 \cdot n + 10^6 \cdot n + 10^9 \cdot n + \ldots$$

eller $$1001n + 10^6 \cdot 1001n + \ldots$$

och då $$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

inses satsens riktighet omedelbart.

Se för övrigt denna tidskrifts årg. 10, sid. 7. *X.*

298) *Om skillnaden mellan en triangels basvinklar är*

$$|\beta - \gamma| = 90^\circ$$

så är

$$\cos\alpha = \frac{v_a^2}{bc},$$

där v_a är bissektris till vinkeln α. *Iter.*

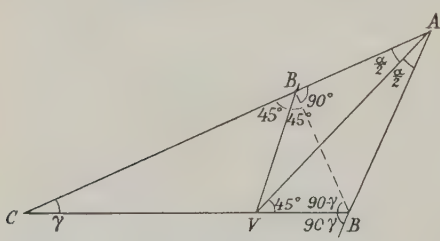


Fig. 1.

Drag $BB_1 \perp AC$. Drag B_1V.

Av relationen

$$\alpha + (90^\circ + \gamma) + \gamma = 180^\circ$$

erhålles 1:o: $\gamma + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$

d. v. s. $\angle AVB = 45^\circ$

och 2:o: $90 - \gamma = 45 + \frac{\alpha}{2}$,

d. v. s. BC är yttre bissektris till vinkeln B i $\triangle ABB_1$. Härav fås

$$\frac{B_1C}{B_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{CV}{BV},$$

och således är B_1V bissektris till $\angle CB_1B$.

Nu inses, att $\triangle CAV \infty \triangle VAB_1$, varav

$$\frac{CA}{AV} = \frac{AV}{AB_1}$$

eller $$\overline{AV}^2 = CA \cdot AB_1$$

eller $$\frac{v_a^2}{bc} = \frac{CA \cdot AB_1}{CA \cdot AB} = \cos \alpha .$$

X.

Även löst av *Cevas.*

299) *Att konstruera en triangel, då man känner en vinkel, motstående sida samt rektangeln av de två övriga sidorna.*

Cevas.

Antag att ABC är den sökta triangeln, där $AB = a$, $\angle ACB = v$ och $CA \cdot CB = k^2$. Avsätt från C på CA ett stycke $CG = CB$, så är $\angle AGB = 90^\circ + \frac{v}{2}$ och $CA \cdot CB = CA \cdot CG = k^2$, varav följer, att punkten C måste befinna sig på en med cirkeln AGB koncentrisk cirkel. Konstruktionen blir alltså följande. Uppslå över $AB = a$ ett cirkelsegment, innehållande den givna vinkeln v. Tag den på andra sidan om AB belägna cirkelbågens mittpunkt O till medelpunkt för en cirkel genom A och B. Upprita den med O koncentriska cirkel, som är orten för punkter, från vilka tangenterna till O ha längden k. Skärningspunkten mellan den yttre cirkeln och den först uppritade bestämmer C.

Cevas.

Anm. Uppgiften löses ock enkelt med användning av relationen

$$h_a = \frac{bc}{2R}.$$

Även löst av *X.*

300) *Två cirklar med radien r ligga i samma plan och avståndet mellan deras medelpunkter är även r. En sfär med diametern r rör sig så, att den ständigt vilar mot båda cirklarna. Sök orten för sfärens medelpunkt.* *X.*

De givna cirklarna ha medelpunkterna O och O_1. Spåret av sfären i cirklarnas plan är en cirkel, som tangerar dessa. Det finnes två system sådana cirklar. I det ena (I) går kontaktkordan PP_1 genom de givna cirklarnas inre likställighetspunkt L, i det andra (II) är kontaktkordan QQ_1 parallell med centrallinjen.

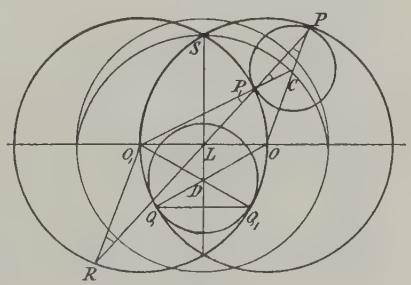


Fig. 2.

I. Om C är medelpunkt för en av dessa cirklar, har man $LP \cdot LP_1 = LR \cdot LP_1 = LS^2 = \frac{3r^2}{4}$. Tangenten från L till den rörliga sfären har alltså konstant längd, och då dess radie $= \frac{r}{2}$, måste dess medelpunkt ligga på avståndet $\sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} = r$ från L, d. v. s. på en sfär Σ. Vidare är C projektionen av sfärens centrum. Då $CO_1 + CO = 2r$, blir orten för C en ellips, med centrum i L. Denna ellips är projektionen av två cirklar, som ha dess storaxel till diameter. Då dessa cirklar även tillhöra Σ, utgöra de den sökta orten i detta första fall.

II. Om D är centrum för en av hithörande cirklar och $LD = x$, beteckna vi avståndet från sfärens centrum till D (och planet OO_1D) med y och få genast

$$DQ = r - \sqrt{x^2 + \frac{r^2}{4}}$$

och ortens ekvation

$$\left(r - \sqrt{x^2 + \frac{r^2}{4}}\right)^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$$

eller efter förenkling

$$(x^2 + y^2)^2 = 2r^2(x^2 - y^2).$$

Denna kurva (en s. k. lemniskata) har formen av en liggande åtta. Se för övrigt LINDELÖF, Lärobok i analytisk geometri, 4 uppl. Sthlm 1889, sid. 156. *X.*

Fysikaliska uppgifter.

Såsom fortsättning på den serie problem — författade av lektor RAGNAR LUNDBLAD — som påbörjades i septemberhäftet 1928, följa här tillämpningsuppgifter på OHMS och KIRCHHOFFS lagar (20—25), värmealstringen i en elektrisk strömbana (26—31), elektrolytisk utfällning (32—33), fasta och flytande kroppars utvidgning (34—37), akustik (38—43).

20. Man ville bestämma en grov metalltråds motstånd och inkopplade den därför i en strömbana, bestående av ett skjutmotstånd och en ampèremeter. Mellan ändarna av metalltråden anordnades en grenledning, innehållande ett motstånd på 100 ohm och en galvanometer med 5 ohms motstånd. Galvanometern hade en sådan känslighet, att varje skaldel motsvarade 2.10^{-7}

amp. Genom att ändra skjutmotståndet reglerade man strömmen i huvudledningen så, att ampèremetern visade precis en ampère. Galvanometerns utslag befanns då vara 11,5 skaldelar. Hur stort var metalltrådens motstånd?

21. Ett batteri, vars elektromotoriska kraft är 14,8 volt och inre motstånd 1,4 ohm, slutes genom en ledning *ABC*. Mellan *A* och *B* består ledningen av två parallellkopplade motstånd, vart och ett å 5,2 ohm. Mellan *B* och *C* består den av en reostat, inkopplad förmedelst grova ledningstrådar. Reostatens ändkontakter äro förbundna med en voltmeter med mycket stort motstånd, vilken visar en spänning på 2 volt. Huru ändras voltmeterns utslag, om ett av de parallellkopplade motstånden borttages?

22. Ett ackumulatorbatteri laddas genom att man under sex timmar leder igenom detsamma 2,5 ampère. Laddningen kan utföras på två olika sätt. Antingen inkopplar man batteriet i serie med ett reglerbart motstånd och en ampèremeter mellan en väggkontakts poler och reglerar motståndet därhän, att strömstyrkan blir 2,5 amp. Eller också kan man mellan väggkontaktens poler inkoppla ett motstånd *ABC* och införa ackumulatorbatteriet jämte ampèremetern i en mellan *A* och *B* inkopplad grenledning, varvid kontakten *B* förskjutes, tills ampèremetern visar strömstyrkan 2,5 amp. Vid ett tillfälle hade det batteri, som skulle laddas, en elektromotorisk kraft på 62,3 volt och ett inre motstånd på 2 ohm, under det laddningen pågick, och motståndet *AB* var 35 ohm. Nätspänningen var 220 volt, och den elektriska energien kostade 15 öre per kilowattimme. Undersök vilkendera anordningen, som är mest ekonomisk, och huruvida prisskillnaden är stor nog för att hava någon praktisk betydelse.

23. De negativa polerna på två Daniells element äro förenade genom en tråd, vars motstånd kan försummas; de positiva äro förbundna medelst en ledning, som innehåller en galvanometer och ett motstånd. Båda elementen äro från början omgivna med smältande snö, och galvanometern visar, att ingen ström då går fram. Uppvärmes det ena av elementen till 25°, så avtager dess elektromotoriska kraft något, och galvanometern visar, att det nu uppstått en elektrisk ström. Förenas polerna hos det element, som fortfarande hålles vid 0°, medelst en reostat, i vilken motstånd å tillhopa 49,8 ohm äro inkopplade, så försvinner strömmen ånyo. Huru mycket minskas elektromotoriska kraften hos ett Daniells element vid uppvärmning från 0° till 25°? Vid 0° kan dess elektromotoriska kraft antagas vara 1,093 volt och dess inre motstånd 0,6 ohm.

24. Polerna på en blyackumulator med elektromotoriska kraften 1,94 volt och inre motståndet 0,05 ohm förenas medelst en yttre ledning. Denna består av ett motstånd på 1,05 ohm och i serie därmed en elektrolysapparat med 3 ohms motstånd, till vars poler en voltmeter med mycket stort motstånd är kopplad. Voltmetern visar därvid 1,75 volt. Beräkna den på grund av polarisationen uppträdande motelektromotoriska kraften i elektrolysapparaten.

25. Ett ackumulatorbatteri, vars elektromotoriska kraft är 220 volt, matar en shuntmotor, vars ankarlindning har motståndet 0,6 ohm och magnetlindning 440 ohm. En i ledningen mellan batteriet och motorn inkopplad ampèremeter visar 8,4 amp. Motståndet i strömbanan utanför motorn, däri inbegripet batteriet, är 2,5 ohm. Huru stor är den motelektromotoriska kraften i ankaret?

26. Ur ett tunt metallbleck utskäras två remsor av samma storlek. Remsornas ändar fastklämmas mot en ebonitram på sådant sätt, att remsorna bliva parallella sinsemellan och ligga i ramens plan. Därefter sotas remsornas översidor, och mitt på undersidorna — men elektriskt isolerade från remsorna — anbringas lödställena av ett termoelement, vars poltrådar förbindas med en galvanometer. Denna anordning skall nu användas för att bestämma, huru många gcal per cm^2 och minut, som en solskensdag genom solstrålningen tillföres jordytan. Ramen med remsorna inställes därför så, att solstrålarna träffa remsorna vinkelrätt. Om då endera remsan beskuggas, uppstår en temperaturdifferens mellan remsorna, vilken giver sig till känna genom ett utslag på galvanometern. Genom att leda en elektrisk ström genom den beskuggade remsan kunde man uppnå, att utslaget på galvanometern gick tillbaka, utvisande att båda remsorna åter fått lika temperatur. Strömmen befanns vid ifrågavarande tillfälle vara 0,285 amp. Huru stor var solstrålningens styrka i gcal per cm^2 och minut? Remsornas bredd var 2,07 mm och deras motstånd 0,196 ohm för varje cm av deras längd. Konstanten i Joules lag är 0,24, om värmeutvecklingen mätes i gcal, motståndet i ohm, strömstyrkan i ampère och tiden i sekunder. Man kan anse, att remsorna absorbera all mot dem infallande strålning.

27. Mellan polerna på en kontakt i belysningsnätet inkopplas en elektrisk ångbildningsapparat, försedd med ett variabelt förkopplingsmotstånd. Apparaten innehåller vatten, och avloppsröret för ångan är avstängt. Från början är blott en mindre del av förkopplingsmotståndet inne, och temperaturen stiger raskt. När temperaturen 99° uppnåtts, minskar man strömstyrkan, tills

temperaturen icke vidare ändras. Den är då 0,32 amp. Avloppsröret för ångan öppnas därpå, och man finner, att en strömstyrka av 1,12 amp. nu erfordras för att hålla temperaturen konstant vid 99°. Huru mycket vatten avdunstar per minut, sedan avloppsröret öppnats? Motståndet hos kokapparatens värmematta är 85 ohm och vattnets ångbildningsvärme 537; 1 watt är 0,24 gcal per sek.

28. Ett blystycke, som väger 800 g är försett med två urborrningar, den ena innehållande ena lödstället av ett termoelement, den andra en elektriskt isolerad värmespiral. Termoelementet består av en koppartråd, som är sammanlödd med två konstantantrådar, vilka äro förenade med var sin av klämskruvarna på en galvanometer; det andra lödstället är avkylt med smältande is. Motståndsspiralen ingår i en strömbana, som består av batteri, reglerbart motstånd och ampèremeter, varjämte en voltmeter med stort motstånd är inkopplad parallellt med spiralen. Genom förförsök har man funnit, att galvanometern visar på ett delstreck *a*, när blystyckets temperatur är 0°, och på ett annat skalstreck *b*, när temperaturen är + 5°. Man avkyler nu blystycket under noll och iakttar, huru galvanometerns visare sedan rör sig. 9 min. 20 sek förflyta från det galvanometerns visare passerar skalstrecket *a* och tills den uppnår *b*. Sedan avkyles blystycket ännu en gång, och strömmen genom motståndsspiralen slutes, varvid ampèremetern visar 0,41 ampère och voltmetern 13,2 volt. Det dröjer nu 1 min. 20 sek. från det visaren passerar delstrecket *a* och tills den uppnår delstrecket *b*. Huru stort är spec. värmet för bly? En ampère utvecklar i 1 ohm 0,24 gcal/sek. Motståndsspiralens värmekapacitet kan försummas.

29. Om man löder samman en järntråd med en konstantantråd på sådant sätt, att motståndet i själva lödningen kan försummas, och sänder en ström genom kombinationen, så finner man, att en värmeutveckling, som är proportionell mot strömstyrkan, inträffar vid lödstället, ifall strömmen går från järn till konstantan, men en lika stor värmeabsorption, om strömmen går i motsatt riktning (»Peltiereffekten»). För att mäta storleken av värmeutvecklingen sammanlödde man ändarna av en konstantantråd med var sitt stycke av en jämntjock järntråd och nedsänkte lödställena i var sin kalorimeter, varvid man tillsåg, att de i kalorimetervätskan nedsänkta delarna av trådarna i båda kalorimetrarna voro lika långa. Den ena järntråden förbands därpå med en ampèremeter, den andra med ett reglerbart motstånd, och mellan ampèremetern och motståndet inkopplades en lämplig strömkälla. I den kalorimeter, som var

närmast strömkällans negativa pol, infördes vidare en uppvärmningsspole, vars motstånd var 12,5 ohm; denna bildade tillsammans med ett batteri, ett skjutmotstånd och en ampèremeter en strömkrets n:r 2. När strömstyrkan i den förstnämnda kretsen var 4 amp. och i den senare kretsen 0,093 amp., uppstod ingen temperaturdifferens mellan kalorimetrarna. Beräkna värmeutvecklingen per sek. i ett lödställe mellan järn och konstantan, när 1 amp. passerar lödstället i riktning från järn till konstantan. De båda kalorimetrarna med innehåll kunna anses äga fullkomligt lika vattenvärde. 1 amp. utvecklar i 1 ohm 0,24 gcal per sek.

30. Från en elektrisk likströmsanläggning *A* med en polspänning av 600 volt utgår en effekt av 10,8 kilowatt till ett ställe *B* på 210 meters avstånd. Ledningarna äro av 2,4 mm tjock koppartråd. Huru många hästkrafter kunna uttagas i *B*? Koppars spec. motstånd är 0,017 ohm. 1 amp. utvecklar i ett motstånd på 1 ohm 0,24 gcal/sek. Värmets mekaniska ekvivalent är 427. En hästkraft är 75 kgm/sek.

31. Inuti ett rör befinner sig en porös propp, som fasthålles genom på båda sidor anbragta, väl fastgjorda nät. På ena sidan om proppen befinner sig luft med några atmosfärers övertryck, vilken långsamt pressas ut genom proppen. Vore luften en ideal gas, skulle dess temperatur därvid ej ändras. Om man emellertid anordnar ett termoelement så, att dess ena lödställe befinner sig strax framför proppen, dess andra lödställe strax bakom proppen, så gör en med termoelementet förenad galvanometer ett utslag, som visar, att temperaturen sjunker, när luften pressas igenom. Genom att i proppen innesluta en värmespiral, i vilken strömstyrkan kan regleras, kan man tillföra så mycket värme, att galvanometern ej gör något utslag Vid ett försök av denna art var värmespiralens motstånd 3,2 ohm och strömstyrkan 22 milliampère. Den utströmmande luften uppsamlades i en gasometer över vatten vid temperaturen 18°. På 10 min. hade i denna samlats 2,12 liter luft, och den inre vattenytan befann sig vid avläsningen 2,5 dm över den yttre. Huru mycket skulle luften avkylas, om den pressades genom proppen utan värmetillförsel? Barometerståndet var 763 mm; 1 liter luft väger vid 0° och 760 mm 1,293 g. Vattenångans maximumtryck vid 18° är 15,5 mm, kvicksilvrets spec. vikt 13,6, gasernas volymsutvidgningskoefficient $^1/_{273}$ och luftens spec. värme 0,170. 1 amp. alstrar i ett motstånd om 1 ohm 0,24 gcal per sek.

32. Ett batteri är sammansatt av 12 seriekopplade ackumulatorer med ett inre motstånd av 0,1 ohm var. Batteriet slutes genom en yttre ledning, bestående av två seriekopplade försilv-

ringsbad, vartdera med motståndet 3,5 ohm, och ett förkopplingsmotstånd om 10 ohm. På en viss tid utfälles i vartdera badet 0,518 g silver. Huru mycket skulle ha utfällts i varje bad på samma tid, om man i stället kopplat 6 av ackumulatorerna och det ena försilvringsbadet efter varandra och på samma sätt de återstående 6 ackumulatorerna och det återstående försilvringsbadet samt kopplat dessa grupper parallellt, med tio-ohmsmotståndet som yttre ledning?

33. Man vill utfälla 10 g silver i vart och ett av fyra likadana försilvringsbad. För detta ändamål förbinder man den positiva kontakten på en belysningsledning med den positiva polen på ett ackumulatorbatteri, vars elektromotoriska kraft är lägre än belysningsnätets spänning. De fyra elektrolytiska baden kopplas efter varandra, och ackumulatorbatteriets negativa pol förbindes med anoden på det första av dem. Katoden på det sista badet förbindes genom en ampèremeter och ett reglerbart motstånd med belysningsledningens andra pol. Strömstyrkan hålles hela tiden vid 0,25 amp. Efter en tid — och innan ännu hela den önskade silvermängden avskilts — frånkopplas belysningsnätet, de fyra försilvringsbaden kopplas parallellt, och deras anod förbindes med ackumulatorbatteriets positiva pol, medan katoden genom ampèremetern och det reglerbara motståndet sammankopplas med batteriets negativa pol. Genom att på lämpligt sätt reglera motståndet tillser man, att varje cell även nu passeras av 0,25 amp. På detta sätt fortsättes elektrolysen, tills den önskade silvermängden avskilts. Huru lång tid bör man använda vardera kopplingen, om man vill, att ackumulatorbatteriet vid elektrolysens slut skall vara lika mycket laddat som vid dess början? Man kan antaga, att ackumulatorbatteriet förmår återgiva 80 % av det antal ampèretimmar, som åtgått vid dess laddning. En ström av 1 amp. utfäller per sekund 1,118 mg silver.

34. En glasballong, vars inre volym vid 0° är 35,244 cm^3, står upptill genom ett kapillärrör, vars volym kan försummas, i förbindelse med en manometer och utmynnar nedtill genom ett fint, med kran försett rör i en skål med kvicksilver. Ballongen innehåller 212,15 g kvicksilver och ovan detta luft, vars tryck kan avläsas på manometern. Från början är ballongen inbäddad i smältande snö men omgives sedan med ånga av vatten, som kokar vid 760 mm tryck. Sedan ballongen antagit ångans temperatur, öppnar man kranen och låter så mycket kvicksilver utrinna i skålen, att trycket återgår till det ursprungliga. Genom att bestämma skålens viktsökning finner man den utrunna kvicksilvermängden vara 98,88 g. Beräkna härav luftens

volymsutvidgningskoefficient, när kvicksilvrets är 0,000181 och glasets 0,000022. Kvicksilvrets sp.vikt vid 0° är 13,596.

35. Avståndet mellan kulans botten och nollstrecket på en kvicksilvertermometer är 22,9 mm och mellan noll- och hundrastrecken 450,3 mm, båda måtten uppmätta vid 0°. Termometern, som är placerad vertikalt och först befinner sig vid 0°, uppvärmes till 100°. Hur mycket ökas därvid kvicksilvrets tryck per cm^2 på kulans botten? Kvicksilvrets spec.vikt är 13,596 vid 0°, glasets längdutvidgningskoefficient 0,000009 och kvicksilvrets volymsutvidgningskoefficient 0,000181.

36. Ett glasrör, som är tillsmält nedtill, är anbragt vertikalt. Inuti detsamma befinner sig en kort glasstav av samma sorts glas, vilken nedtill är fastsmält vid rörets botten och upptill är tillspetsad. I röret inskjutes en 40,2 cm lång stav av kvartsglas, så att den nedtill kommer att vila på den första glasstavens spets. Därefter inskjutes en tredje glasstav, som nedtill är tillspetsad, tills den ovanifrån kommer i kontakt med kvartsglasstaven. Denna tredje stav är liksom den förstnämnda staven av samma sorts glas som glasröret och är i sin övre del försedd med en gradering i tiondedels millimeter. På insidan av glasröret, mitt för denna gradering, är en likadan gradering inristad; och då de båda graderingarna vila mot varandra, kunna de samtidigt iakttagas i ett mikroskop. Glasröret är ursprungligen inbäddat i smältande snö, varur endast den översta delen med graderingarna skjuter upp. Om snön borttages och man i stället omgiver röret upp till graderingarna med ett ångbad av temperaturen 100°, kan man i mikroskopet iakttaga, att de båda graderingarna förskjutas 3,2 skaldelar — d. v. s. 0,32 mm — i förhållande till varandra. Samma experiment upprepas med en 40,0 cm lång stav av en metallegering i stället för kvartsglasstaven. Vid uppvärmningen ser man nu i mikroskopet, att graderingen på glasstaven förskjutes 4,45 skaldelar i motsatt riktning mot vid föregående experiment. Huru stor är metallstavens längdutvidgningskoefficient, när samma storhet för kvartsglas är 5.10^{-7}?

37. I ett i ena ändan tillsmält glasrör är en luftpelare avspärrad genom en kvicksilverpelare, vilken, om rörets temperatur är 0°, har längden 30,24 cm. Huru stort blir den inneslutna luftens tryck mätt i gf/cm^2, om röret anbringas i ett ångbad av temperaturen 100°, i vertikal ställning och med den tillsmälta ändan nederst? Barometerståndet är normalt. Glasets längdutvidgningskoefficient är 0,000009, och kvicksilvrets spec.vikt vid 0° är 13,6.

38. En sträng är fastgjord i en punkt *A*, löper över ett stall *B* och en trissa och uppbär en vikt om 5 kg. När stycket

AB, som är 50 cm långt, anstrykes med en stråke, uppkommer en viss ton. En annan sträng av samma material och samma tjocklek löper över två trissor och uppbär i vardera ändan en vikt om 10 kg. Medelst två stall A_1 och B_1 skall ett stycke avskiljas, som vid transversella svängningar ger tersen till den förstnämnda tonen. Huru stort bör stycket A_1B_1 tagas?

39. Två elektromagnetiska hammare äro förbundna genom en lång elektrisk ledning och matas med en och samma ström, som genom en särskild anordning avbrytes 12 gånger i sekunden. Om den ena hammaren uppställes i en punkt på en smal, rak väg och man bär med sig den andra, så hör man slagen från båda hamrarna inträffa i samma ögonblick, så länge man är nog nära den fast uppställda hammaren. Avlägsnar man sig utefter vägen, märker man först, att hammarslagen ej längre stämma överens; men sedan man gått 28 m sammanträffa de ånyo. Om hamrarna båda uppställas fixt, en på vardera sidan om vägen och 21 m från densamma samt på sådant sätt, att deras sammanbindningslinje bildar 45°:s vinkel med vägens riktning, så hör man hammarslagen sammanträffa, ifall man står på vägen, mitt emellan hamrarna. Huru långt måste man gå utefter vägen, innan de ånyo koincidera?

40. Ett U-formigt böjt metallrör har en vidd, som är så avpassad, att skänklarna av ett annat U-formigt rör nätt och jämnt kunna inskjutas i detsamma. Det första röret är försett med två korta sidorör, vilka äro anbragta på var sin skänkel, mitt emot varandra och riktade utåt. Framför det första sidoröret uppställes en stämgaffel; det andra sidoröret förbindes medelst en slang med experimentatorns hörselgång. Om nu det förskjutbara U-röret först är inskjutet så långt, att båda ljudvägarna äro lika långa, så höres stämgaffelns ton med relativt stor intensitet. Utdrages röret, så finner man, att tonstyrkan först avtar till ett minimum, sedan åter tilltar, därefter avtar till ett nytt minimum c. s. v. Den sträcka röret måste förskjutas från det första ljudminimet till det andra uppmätes och befinnes vara 38,5 cm. Förklara uppkomsten av ljudminima och beräkna stämgaffelns svängningstal. Ljudets hastighet i luften i röret är 334,7 m/sek.

41. En mässingstav fastklämmes med två tvingar, anbragta på en fjärdedel av stavens längd från vardera ändan räknat. Genom gnidning med en lapp försättes den i longitudinella svängningar och avger därvid en ton. Vilken ton i den diatoniska skalan kommer denna närmast? Stavens längd är 1,42 m, och ljudets hastighet i mässing 3550 m/sek. Svängningstalet för ā är 435.

42. Man ville undersöka, huruvida ljudets hastighet i glas ändras med temperaturen. En glasstav fästes i anledning därav på vanligt sätt framför ett Kundts rör. Glasstaven, som var fastklämd vid mitten, sattes genom strykning i längdriktningen i longitudinella svängningar. Korkpulvret i röret ordnade sig då i noderna, och man fann, att avståndet från den första till den sjunde noden vart 63,4 cm, om anordningens temperatur var 0°C, men 66,9 cm, om temperaturen var 30°C. Undersök med hjälp av dessa siffror, huruvida ljudets hastighet i glas ändrats, och beräkna, i händelse detta är fallet, förhållandet mellan hastigheterna vid de båda temperaturerna. Ljudets hastighet i luft är proportionell mot kvadratroten ur den absoluta temperaturen, vars nollpunkt ligger vid — 273°C. Man kan bortse från glasstavens längdutvidgning och från dess uppvärmning på grund av friktionen.

43. Om en viss sluten läppipa ljuder samtidigt med en stämgaffel, vars ton är $\bar{c}$, så höras tre svävningar per sekund mellan stämgaffelns ton och pipans grundton. Om en annan läppipa, som är öppen, ljuder samtidigt med en stämgaffel, vars ton är g, så höras två svävningar per sekund mellan stämgaffeln och pipans grundton. Om båda piporna ljuda samtidigt, uppkomma svävningar mellan första övertonerna. Beräkna svävningarnas antal per sek.

Resultat: **20.** 2,415. 10^{-4} Ω. **21.** 1,280 V. **22.** Laddningen kostar resp. 49,5 öre och 87,6 öre. **23.** 0,01301 V. **24.** 1,232 V. **25.** 194,2 V. **26.** 1,107 gcal per cm^2 och min. **27.** 2,63 g/min. **28.** 0,03031. **29.** 0,003244 gcal/sek. **30.** 14,06 hk. **31.** 0°,532. **32.** 0,1956 g. **33.** Resp. 8 tim. 17 min. och 1 tim. 39 min. **34.** 0,003667. **35.** 601,3 gf/cm^2. **36.** 1,96. 10^{-5}. **37.** 1444 gf/cm^2. **38.** 56,57 cm. **39.** 23,42 m. **40.** 434,6. **41.** Fyrstrukna e (något lägre). **42.** Ingen ändring med säkerhet konstaterad. **43.** Endera 5 eller 13 svävningar per sekund.

Allmänna metoder vid geometriundervisningen.

Av HENRIK PETRINI.

(Forts.)

8. Pascals sexhörning.

Läran om PASCALS *sexhörning* är av samma natur: den medför inga långa räkningar utan ger ett resultat på ett intuitivt sätt. Först framställes ekvationen för en konisk sektion, som går genom fyra punkter med användning av förkortat beteckningssätt. Den blir $\alpha\gamma = k\beta\delta$, där k är en arbiträr konstant och $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ och $\delta=0$ äro respektive linjers ekvationer (fig. 17 a).

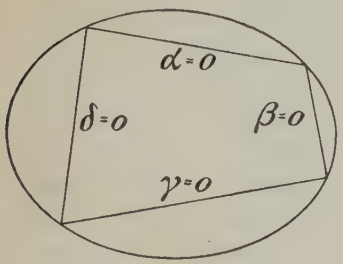


Fig. 17 a.

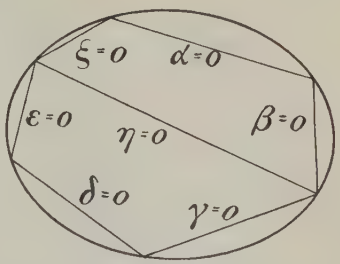


Fig. 17 b.

Man inskriver nu en sexhörning i en konisk sektion och drager en diagonal (fig. 17 b). Den koniska sektionens ekvation kan då skrivas på två sätt:

$$\alpha\eta = k\beta\zeta \text{ och } \delta\eta = k_1\gamma\varepsilon .$$

Dessa båda ekvationer beteckna samma kurva och måste därför bli identiskt lika, om man multiplicerar den ena med en lämpligt vald konstant h, d. v. s.

$$\alpha\eta - k\beta\zeta = h(\delta\eta - k_1\gamma\varepsilon),$$

varav

$$\eta(\alpha - h\delta) = k\beta\zeta - hk_1\gamma\varepsilon .$$

Då denna ekvation är en identitet, så satisfieras den ej blott av alla punkter på kurvan utan även av alla punkter i planet. Man finner då, att räta linjen

$$\alpha - h\delta = 0$$

satisfieras av skärningspunkterna mellan de tre paren motstående linjer, nämligen $(\alpha=0, \delta=0)$, $(\beta=0, \varepsilon=0)$, $(\gamma=0, \zeta=0)$[1], vilket utgör Pascals *teorem: Om en sexhörning är inskriven i en konisk sektion, så skära dess motstående sidor varandra i tre punkter, som ligga i rät linje.*

En god tankeövning ger nu diskussionen av de fall, då ett eller flera par hörn sammanfalla. Man finner bl. a. följande sats:

Om en fyrhörning är inskriven i en konisk sektion och man i dess hörn drager tangenter till kurvan, så komma de fyra punkter, där motstående sidor och motstående tangenter råka varandra, att ligga på samma räta linje.

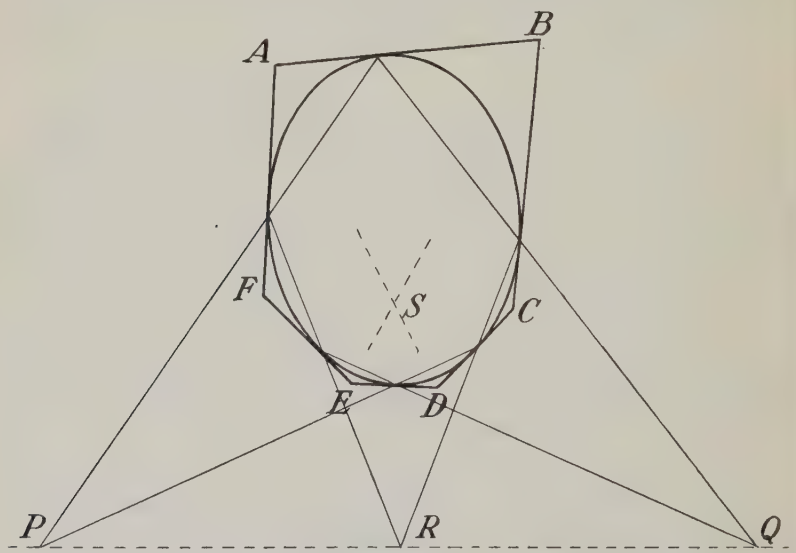


Fig. 18.

[1] Ty för de två sista värdeparen blir identitetens högra membrum = 0; då måste även dess vänstra membrum vara = 0, d. v. s. $\alpha - h\delta = 0$, ty dessa skärningspunkter ligga ej på linjen $\eta = 0$, varför faktorn η ej är = 0.

Med hjälp av läran om poler och polarer — se marsnumret sid. 132 — erhålles nu

Brianchons *teorem: Om en sexhörning är omskriven omkring en konisk sektion, så råka de tre mellersta diagonalerna varandra i en och samma punkt.*

Ty sammanbindas tangeringspunkterna (fig. 18), blir skärningspunkten P mellan två motstående sidor i den så uppkomna inskrivna sexhörningen pol till ändpunkterna A och D av ena diagonalen AD, som alltså blir polar till P. Likaså blir Q pol till B och E; alltså är BE polar till Q. Om nu diagonalerna AD och BE skära varandra i punkten S, så blir denna punkt pol till P och Q; således är PQ polar till S. På samma sätt visas, att CF är polar till R. Enligt Pascals *teorem* ligger R på PQ, varav följer, att R och S äro poler. Alltså ligger S på polaren till R, d. v. s. på CF. *V. S. B.*

Låter man ett eller flera par punkter sammanfalla, så erhållas specialfall, vilkas diskussion ger en god övning. Så finner man, att om en triangel ABC är omskriven omkring en konisk sektion, så råkas de räta linjerna AE, BD och CF i en och samma punkt (fig. 19).

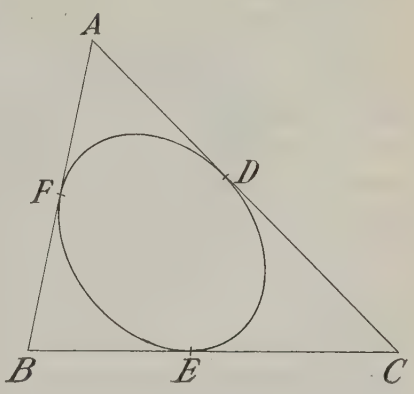


Fig. 19.

Detta är en vacker generalisering av motsvarande sats för den inskrivna cirkeln, vilken i sin tur bevisas vara en omedelbar följd av Cevas *teorem.*

En annan vacker följdsats fås på samma sätt: *Om en fyrhörning är omskriven omkring en konisk sektion, så gå de räta linjer, som förena motstående tangeringspunkter, genom diagonalernas skärningspunkt.*

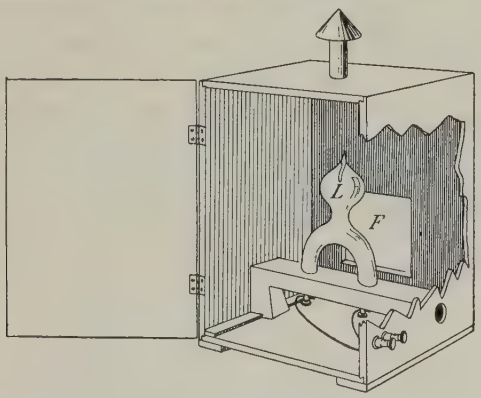
Enkla försök för att påvisa den ultravioletta och den ultraröda strålningen.

Av T. E. AURÉN.

De icke synliga delarna av spektret tillvinna sig allt större intresse. Jag behöver knappast erinra om kvartslampans segertåg genom världen. Men att icke blott den ultravioletta utan även den ultraröda strålningen göres till föremål för allmänt intresse, därför sörja tidningarna genom sina ofta återkommande notiser om dessa strålars användning för medicinska ändamål, deras påstådda användbarhet vid bildöverföring m. m. Det torde därför icke längre kunna anses tillräckligt med ett mer eller mindre flyktigt omnämnande, utan det är nödvändigt att genom experiment söka direkt påvisa tillvaron av dessa strålningsarter. Svårigheterna att vid elementär undervisning med tillhjälp av termostaplar eller bolometrar påvisa ifrågavarande spektralområden äro alltför väl kända för att här behöva närmare utredas. Emellertid torde de för mera vetenskapliga undersökningar avsedda apparaterna i dessa fall kunna undvaras och ersättas med enklare och billigare anordningar.

Vad den ultravioletta strålningen angår, erhålles givetvis den bästa effekten med tillhjälp av en kvartslampa. Firman Heræus, Hanau, säljer en kvartspunktljuslampa (för likriktad ström, pris 90 kr), som ger en kraftig ultraviolett strålning. Med tillhjälp av fluorescerande preparat kan strålningen lätt påvisas. Det synliga ljuset bör emellertid avskärmas, vilket bekvämt kan göras med glasskivor av s. k. ultraviolettglas, som framställas av firman Schott & Gen i Jena (katalog n:r UG 2). Denna glassort, som är i det

närmaste ogenomskinlig för vanligt ljus — den genomsläpper obetydligt i violett och rött — har en ganska hög transmissionsförmåga för ultraviolett i området 0,31—0,38 μ. Vill man i stället för kvartslampa begagna båglampa, erhålles bästa effekten med tillhjälp av kol, preparerade med nickel. Sådana kol tillverkas av firman Zeiss och kunna erhållas genom firmans agentur i Stockholm[1]. En användbar, enkel och billig kvicksilverlampa tillhandahålles av Grave (katalog n:r 9905). Denna lampa är visserligen förfärdigad av glas, men tillräckligt stark ultraviolett strålning erhålles för skolförsök. Lämpligast är att innesluta lampan i en ljustät



låda, som är försedd med ett fönster av ultravioletttglas. Figuren visar en sådan låda med inmonterad lampa (*L*), sedd från baksidan. På lådans framsida finnes ett fönster (*F*) av nyss omtalade glassort. Lådan jämte lampa kan erhållas från Grave (pris 50 kr). För påvisande av strålningen kan användas t. ex. en tärning av uranglas eller fluorescerande preparat. En samling (7 st.) kraftigt och i olika färger fluorescerande preparat (s. k. »Flu-Farben»), inneslutna i små glasflaskor kan erhållas från E. de Haën A. G., Seelze bei Hannover (pris ungefär 6 kr). En liten kartong med 24 likaledes i olika färger starkt fluorescerande preparat tillhandahålles av Grave (pris kr 5: 25).

[1] Ingenjörsfirman Georg Schönander, Birgerjarlsg. 16

Den ultraröda strålningen kan på ett synnerligen enkelt sätt påvisas med tillhjälp av en zinksulfidskärm (Grave n:r 10150). Sedan skärmen under några minuter belysts med dagsljus, projicieras i mörkt rum ett spektrum från en båglampa på densamma. I det ultraröda området synes då under några ögonblick en något kraftigare fluorescens än på de icke belysta delarna av skärmen, men fluorescensen släckes hastigt ut och efterträdes av en så kraftig försvagning, att den ultraröda delen av spektret synes mörk i förhållande till övriga delar av skärmen. Sedan spektret avskärmats, framträder det ultraröda spektret nästan svart på skärmen. Fenomenet beror på att ultrarött ljus har förmåga att hastigt utsläcka fluorescensljuset hos zinksulfid. Experimentet är synnerligen lätt att utföra och ger en mycket god effekt. Stensaltoptik är icke nödvändig utan vanliga glaslinser och prismor kunna användas, men svärtningen blir kraftigare och sträcker sig längre ut i spektret, då stensalt användes.

Den piezoelektriska kvartsresonatorn.

Av BENGT BECKMAN.

Kvarts kristalliserar i det hexagonala systemet. I fig. 1 synes en bild av en kvartskristall med den övre hälften

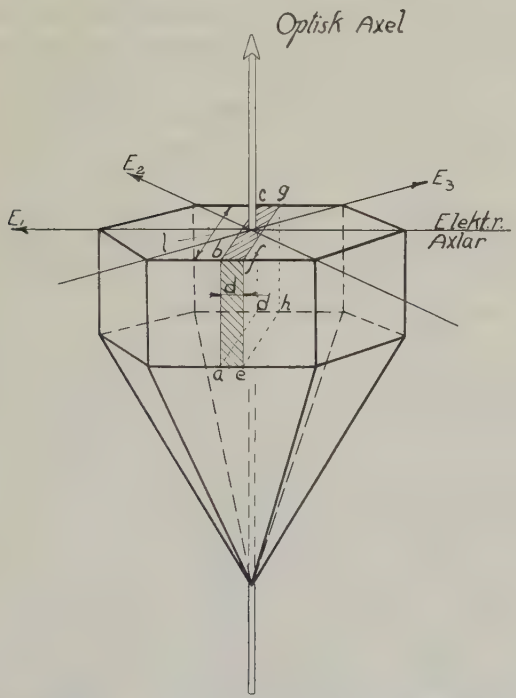


Fig. 1. Kvartskristall med orienteringen av den optiska axeln och de tre elektriska axlarna. En planparallell platta med sidoytorna *abcd* och *efgh* tänkes utskuren.

bortskuren. Ett plan genom kristallens centrum vinkelrätt mot den vertikalt ställda optiska axeln, som är en tretalig kristallografisk axel, avskär en sexhörning. De tre diago-

nalerna i denna äro även symmetriaxlar och kallas elektriska axlar. Vi tänka oss en planparallell platta utskuren ur kristallen på det sätt, som fig. 1 visar. Plattans höjd (*ab*) är parallell med den optiska axeln, och dess större sidoytor (*abcd*) och (*efgh*) äro vinkelräta mot den elektriska axeln E_1. Dessa ytor äro försedda med var sin metallbeläggning. Om kristallen sammanpressas utmed axeln E_1, laddas dessa beläggningar den ena positivt, den andra negativt. Laddningarnas storlek är densamma för båda ytorna och proportionell mot det anbragta trycket. Inuti kristallen verkar således ett elektriskt fält parallellt med den elektriska axeln E_1, den *longitudinella* piezoelektriska effekten. En utvidgning utmed axeln E_1 medför, att fältets riktning kastas om. En deformation vinkelrätt mot axeln E_1 och parallell med plattans längdriktning (*bc*) ger även upphov till laddningar på de båda nämnda ytorna, den *transversella* effekten. Omvänt ger ett elektriskt fält i den elektriska axelns riktning en deformation såväl i axelns riktning som parallellt med plattans längdriktning, de *inversa* eller *reciproka* effekterna. Dessa formförändringar gå i en sådan riktning, att det alstrade elektriska fältet söker motverka det ursprungliga. De piezoelektriska effekterna upptäcktes av bröderna P. och J. Curie 1880. De direkta effekterna kunna lätt påvisas, om man förbinder de båda beläggningarna med en elektrometer.

Vi tänka oss de båda beläggningarna anslutna till en växelströmskälla. I kristallen alstras då ett elektriskt växelfält parallellt med den elektriska axeln E_1, och till följd av de inversa effekterna uppkomma omväxlande dilatationer och kompressioner parallellt med kanterna *bf* och *bc*. Plattan utför mekaniska svängningar. Amplituden hos dessa är störst vid resonans, d. v. s. då frekvensen hos växelfältet sammanfaller med frekvensen hos en elastisk egensvängning, och avtar hastigt på båda sidor om resonanspunkten. Vid stor fältstyrka kunna svängningarna bli så kraftiga, att kristallen splittras. Dessa svängningar alstra i sin tur laddningar på beläggningarna, och därigenom upp-

står en elektrisk återverkan på den primära spänningskällan. Detta problem har utförligt behandlats av amerikanaren W. G. Cady 1922. På grund av den svaga dämpningen kan denna återverkan vid resonans bli betydande.

Vi kunna särskilja två fall av resonans. Växelspänningens frekvens kan sammanfalla med någon av frekvenserna för plattans mekaniska svängningar utmed den elektriska axeln E_1, longitudinell effekt, eller utmed längdriktningen, transversell effekt. I det förra fallet utför kristallen transversella svängningar, i det senare longitudinella. I det följande skola huvudsakligen de senare behandlas.

Vid den longitudinella grundsvängningen är plattans längd (l) lika med halva våglängden. Utbredningshastigheten (v) i kristallen är approximativt

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 5{,}4 \times 10^5 \text{ cm/sek.}$$

E är elasticitetsmodylen och ϱ tätheten[1]. Svängningstalet för grundsvängningen är då

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \frac{2{,}7 \times 10^5}{l} \text{ sek}^{-1}.$$

Om plattans begränsningsytor äro fria, uppkommer i mitten en nod. Översvängningarna äro i det närmaste harmoniska, således approximativt $2n$, $3n$ . . .

Kvartskristallen kan monteras på olika sätt. Beläggningarna anbringas antingen direkt på kristallens ytor *abcd* och *efgh* eller på ett visst avstånd därifrån. I det förra fallet kunna plattorna försilvras eller förses med beläggningar av stanniolblad. Med denna anordning kan man endast få grundsvängningarna kraftigt utbildade. Ofta läggas mellan kristallen och den undre eller båda beläggningarna glimmerblad eller stöd av ebonit, som placeras i nodytorna, vilkas lägen bestämmas med hjälp av Chladnis klangfigurer. Om man önskar erhålla översvängningar i längdriktningen, användas ofta lika många par elektroder, som ordnings-

[1] Man har även funnit longitudinella svängningar, som motsvara en hastighet av $7{,}7 \times 10^5$ cm/sek.

talet för svängningarna anger, således tre par för frekvensen $3n$, där n betecknar den lägsta frekvensen.

De piezoelektriska egenskaperna hos kvarts ha under de senaste åren i stor utsträckning utnyttjats inom högfrekvenstekniken. Den förste, som insåg den stora praktiska betydelsen härav, var CADY. Jag skall i det följande ge exempel på användning av kvartresonatorn i sändare och mottagare av elektriska och akustiska vågor, som stabilisator för en sändares frekvens och som våglängdsnormal.

Fig. 2 visar en sändaranordning av CADY med elektronrör och kvartsresonator. Den senare är försedd med två par beläggningar, av vilka det ena står i förbindelse med anoden, det andra med gallret. Z är ett motstånd, en spole med självinduktion eller en elektrisk svängningskrets. En liten förändring i anodens potential åstadkommer en förändring av det elektriska fältet mellan elektroderna vid B; därigenom sättes kristallplattan i longitudinella vibrationer. Dessa framkalla laddningar på beläggningarna vid A och därmed en periodiskt växlande potentialdifferens mellan gallret och glödkatoden i takt med plattans svängningar. Röret förstärker denna växelspänning, varigenom de mekaniska svängningarna hållas vid makt. Värdet på impedansen i Z har praktiskt taget intet inflytande på frekvensen. Kvartsresonatorn tvingar således rörsändaren att svänga synkront med kristallplattan. Amplituden hos de elektriska svängningarna ökas avsevärt, om Z utgöres av en elektrisk svängningskrets, bestående av en kondensator och en spole med

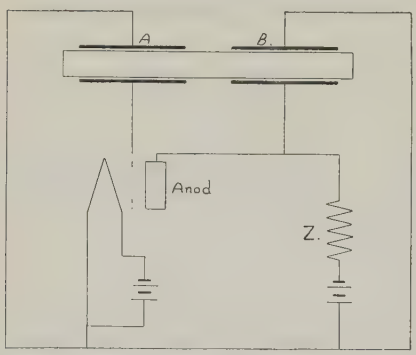


Fig. 2. Rörsändare med kvartsresonator enligt CADY. Frekvensen bestämmes av kvartsplattans mekaniska svängningstal. Z kan antingen vara ett motstånd (med eller utan självinduktion) eller en svängningskrets.

självinduktion, kopplade parallellt. Kretsen skall vara avstämd för kristallens frekvens.

Fig. 3*a* visar en sändaranordning, där kvartsresonatorn är inkopplad i gallerkretsen och svängningarna i plattan äro transversella.

Om en rörsändare med kvartsresonator, som utför longitudinella grundsvängningar, kopplas till en antenn, utsändas radiovågor, vilkas våglängd (λ_e) bestämmes ur ekv.

$$n = \frac{3{,}0 \times 10^{10}}{\lambda_e} = \frac{2{,}7 \times 10^5}{l}.$$

Således är approximativt

$$\lambda_e = 1{,}1 \times 10^5 \, l.$$

Om kristallens längd är 10 mm, är våglängden 1 100 m.

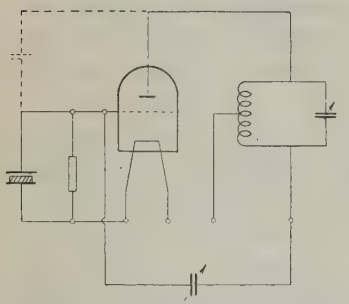


Fig. 3 a. Rörsändare med kvartsresonator i gallerkretsen.

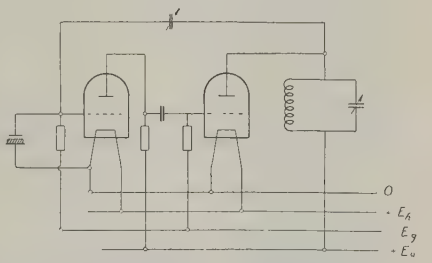


Fig. 3 b. Rörsändare med kvartsresonator för långa vågor enligt HEEGNER.

K. HEEGNER har angivit en koppling för en sändare med två rör för långa vågor (se fig. 3 b). Kvartsresonatorn, som utför längdsvängningar, är även här inkopplad i gallerkretsen. Återkopplingen sker med en kondensator. För sändare med mycket stor våglängd erfordras långa kvartsplattor, som ställa sig jämförelsevis dyra. CADY har för våglängder större än 6 000 m konstruerat en resonator, bestående av en tunn stålstav, på vilken äro fastkittade två mindre kvartsplattor (se fig. 4). På de sidor av plattorna, som äro vända från stålstaven, äro fästade två tennblad, som förbindas med varandra. Dessa senare bilda tillsammans

den ena beläggningen; stålstaven är den andra. De båda åt staven vända kristallytorna ha således samma polaritet. Anlägges en växelspänning mellan de båda beläggningarna, utvidga och sammandraga sig de båda kvartsplattorna, och stålstaven försättes i longitudinella svängningar, som bli kraftigast, om växelspänningens frekvens överensstämmer med stålstavens. För radiovågor av 10 000 m våglängd använde CADY en stålstav av dimensionerna 95 × 9 × 3 mm med två kvartsplattor 9 × 10 × 1 mm. Den totala längden är således 10 cm, men kvartsplattornas längd endast 1/10 därav. Man kan framställa kvartsresonatorer av ovan nämnda typer i frekvensområdet 3 000 — 3 000 000 svängningar per sekund, motsvarande ett våglängdsområde av 100 000 — 100 m.[1]

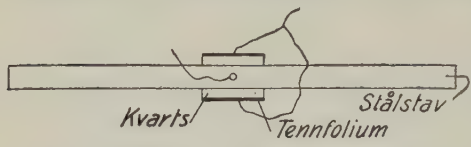


Fig. 4. Kvartsresonator med lång stålstav och korta kvartsplattor, avsedd för långa vågor (CADY).

För att närmare studera kvartsresonatorns egenskaper vid resonans använde CADY följande metod (se fig. 5). Spolen L hör till en rörsändare, vars frekvens (n) kan varieras kontinuerligt. Denna spole är löst kopplad till spolen L_1, som tillsammans med vridkondensatorn C_1 bildar en svängningskrets. Parallellt med denna ligger kvartsresonatorn (C_2), vars svängningstal för den longitudinella grundsvängningen (n_0) är 89 860. Kretsen $L_1 \| C_1$ instämmes approximativt i resonans med denna. Sändarens frekvens ligger först under resonansfrekvensen (n_0) och ökas sedan kontinuerligt; samtidigt mätas

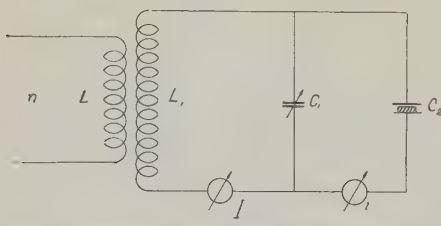


Fig. 5. Anordning av CADY för bestämning av resonansfrekvensen. L spole till rörsändare med frekvensen n, som är induktivt kopplad till en svängningskrets, bestående av spolen L_1 och vridkondensatorn C_1. Parallellt med C_1 ligger kvartskondensatorn C_2 med frekvensen n_0.

[1] Se vidare sid. 17

strömstyrkorna I och i (se fig. 5). När n närmar sig n_0 ökas I i början kontinuerligt som vid en normal resonans kurva (se fig. 6), men för ett värde på n, som ligger mycket nära resonansfrekvensen, sjunker strömstyrkan ytterst hastigt, når ett minimum för $n = n_0$ och stiger sedan brant. Den övriga delen av kurvan har åter karaktären av en normal resonanskurva. Den skarpa insänkningen på resonanskurvan visar kvartsresonatorns kraftiga återverkan på svängningskretsen i den närmaste omgivningen till resonanspunkten. Den absorberar då en avsevärd energimängd. Dämpningen är mycket liten. Inställningen på resonansfrekvensen kan ske mycket skarpt. Cady uppger noggrannheten till ungefär 0,01 % av värdet på n_0. Fig. 7 återger den karakteristiska sänkningen med utsatta värden på strömstyrka och frekvens. Resonanskurvans förlopp visar, att kvartskondensatorns kapacitet (C_2) i närheten av resonanspunkten undergår stora förändringar (se fig. 7). Dess normala värde är 4,5 mikromikrofarad[1]. För frekvenser något lägre än n_0 ökas den skenbara kapaciteten i början långsamt sedan hastigt till värdet $42 \mu\mu F$, sjunker vid växande frekvens plötsligt till ett negativt värde $-32 \mu\mu F$ och stiger sedan asymptotiskt till det normala värdet. Den plötsliga förminskningen av kapaciteten inträffar vid resonansfrekvensen. S. Butterworth har visat, att dessa förändringar i strömstyrkan och kapaciteten skulle inträffa, om kvartskondensatorn tänkes ersatt av en kombination av två parallellt med varandra kopplade kretsar. I den ena finnes en kondensator (C_{st}), i den andra i serie en självinduktion (L_m), ett induktionsfritt motstånd (R_m) och en annan kondensator (C_m). Om det mellan kristallen och beläggningarna finnes

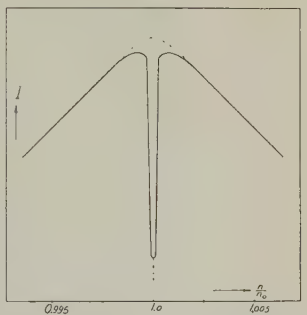


Fig. 6. Resonanskurva vid koppling enligt fig. 5. Strömstyrkan (I) som funktion av förhållandet n/n_0 (n är de tvungna svängningarnas frekvens, n_0 resonansfrekvensen).

[1] $1 \mu\mu F = 10^{-12}$ farad.

ett luftskikt, tillkommer en tredje kondensator (C_p) i serie med denna kombination. Fig. 8 visar CADYS koppling med

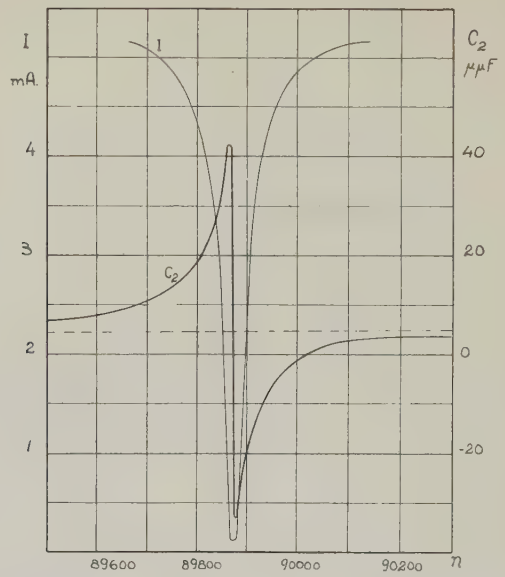


Fig. 7. Resonanskurva som vid fig. 6 i förstorad skala med de tvungna svängningarnas frekvens som abscissa. Kvartsresonatorns skenbara kapacitet (C_2) som funktion av n.

denna kombination insatt i stället för kvartsresonatorn. Vid hans försök voro kristallplattans dimensioner $30 \times 4 \times 1{,}4$ mm.

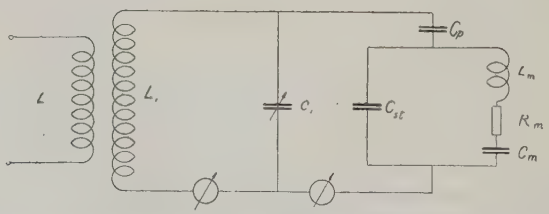


Fig. 8. Samma anordning som i fig. 5, men i stället för kvartsresonatorn är tecknad en kombination, som i elektriskt hänseende kan tänkas ersätta resonatorn.

Ur mätningarna beräknas $L_m = 140$ henry, $C_{st} = 3{,}6\,\mu\mu F$, $C_m = 0{,}0\,2\,3\,\mu\mu F$, $R_m = 16\,000$ ohm.

Cady har angivit en enkel akustisk metod för fastställande av resonansfrekvensen för sådana fall, då man ej behöver någon större noggrannhet. Kvartsresonatorn kopplas i serie med två induktionsspolar, vilkas självinduktion avpassas, så att svängningskretsen approximativt är instämd för en av resonatorns egenfrekvenser. Den ena spolen kopplas löst till en rörsändare med varierbar frekvens. Den andra förbindes med en detektor, en vanlig lågfrekvensförstärkare och en telefon. Rörsändarens frekvens ändras hastigt i närheten av resonanspunkten. När denna senare överskrides, hör man i telefonen en svävningston, som hastigt sätter in. De elektriska svängningar, som uppkomma på grund av den piezoelektriska effekten, överlagras av sändarens svängningar och interferera med dem. Vi få en svävningston, som ligger inom det frekvensområde, för vilket telefonen reagerar.

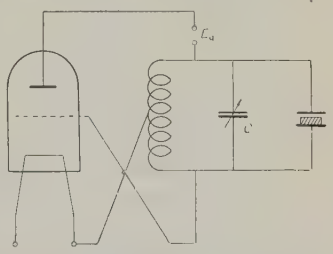


Fig. 9. Rörsändare. Parallellt med vridkondensatorn är inkopplad en kvartsresonator för stabilisering av frekvensen.

En sändare med kvartsresonator har den viktiga egenskapen, att variationerna i frekvensen äro ytterst små. Kvartsresonatorn användes därför som stabilisator av en oscillators frekvens. Fig. 9 visar en sändare med en anordning i detta syfte. Parallellt med svängningskretsen är kvartskondensatorn inkopplad. Vi antaga, att kretsens frekvens (n) är något mindre än resonatorns (n_0) och skola studera, hur n förändras, då avstämningskondensatorns kapacitet (C) successivt minskas. Enligt Thomsons formel

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

skulle n stiga enligt kurvan (128 367), om kvartskondensatorn ej vore tillkopplad (se fig. 10). Punkten 3 är kurvans skärning med linjen $n = n_0$. Vid närvaro av kvartsresonatorn följer n i stället kurvan 1284. När n nått punkten 8, börjar resonatorn att svänga. Dess kapacitet stiger (se fig. 7)

och därigenom kompenseras till största delen minskningen i C. Den resulterande kapaciteten blir approximativt konstant och n följer kurvan 284, som är nästan parallell med ordinataxeln. Frekvensen undergår endast en mycket obetydlig ökning, oaktat vridkondensatorns kapacitet (C) minskat avsevärt. På liknande sätt följer frekvensen kurvan 765, om vi börja med en frekvens, som är större än n_0 och successivt öka C. Punkterna 4 och 5 äro instabila punkter. Minskas C i förra fallet från värdet i 4, springer frekvensen plötsligt över till värdet i punkten 6 och i senare fallet vid ökning i C från 5 till 2. I omgivningen till resonansfrekvensen finnes således ett område, där svängningskretsens frekvens knappast röner något inflytande av förändringar i vridkondensatorns kapacitet. Cady anger ett belysande exempel härpå. Vid en kvartskristall av 39 mm längd ($n = 69\,700$) ändrades svängningskretsens frekvens 3 % för en viss variation av vridkondensatorns kapacitet utan kvartsresonator. Då denna senare inkopplades, uppgick förändringen i frekvens för samma variation i C endast till 0,005 %. Andra orsaker till störningar i frekvensen ha i detta fall ungefär lika litet inflytande inom det nämnda frekvensområdet.

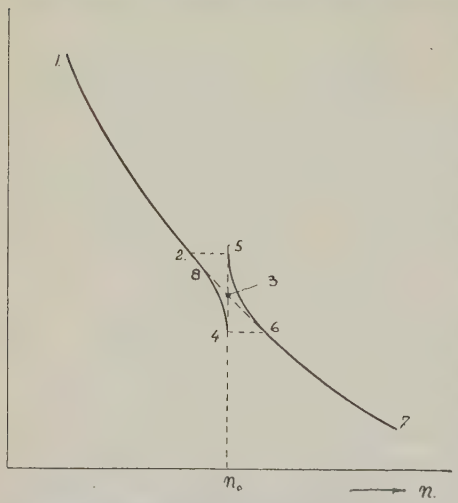


Fig. 10. Diagram, som visar kvartsresonatorns stabiliserande verkan i rörsändare enligt fig. 9. C är vridkondensatorns kapacitet, n svängningskretsens frekvens, n_0 resonansfrekvensen.

Kvartsresonatorn har, som vi ovan sett, egenskapen att kunna synkronisera en rörsändare. De därvid uppkommande svängningarna ha synnerligen konstant frekvens, som praktiskt taget sammanfaller med kristallens meka-

niska svängningstal. Med denna egenskap sammanhänger en annan användning av kvartsresonatorn nämligen som normal för frekvens och våglängd. Man kalibrerar en serie resonatorer med en noggrann våglängdsmätare och inställer sändaren på dessa normalvåglängder. De egenskaper, som göra kvartsresonatorn så lämplig som frekvensnormal äro följande. Den ändras ej med tiden, har låg temperaturkoefficient och liten dämpning, den kan användas utan besvärliga hjälpapparater och kan tillverkas för ett mycket stort frekvensområde.

E. Giebe och A. Scheibe ha publicerat en optisk metod för påvisandet av svängningarna i en kvartsresonator, som möjliggör en ytterst noggrann inställning på resonans. En kvartsplatta lades mellan två metallelektroder, så att den vilade på två små ebonitstöd, som voro anbragta vid plattans båda ändar (*ab* och *cd* i fig. 1). Ebonitstöden voro fästade på den undre elektroden. Mellan kvartsplattans övre yta och den övre elektroden var ett luftskikt på 0,5 mm. Apparaten placerades i vakuum (trycket var omkring 10 mm). En rörsändare anslöts till de båda beläggningarna. Vid resonans mellan sändarens frekvens och grundfrekvensen för kristallens longitudinella svängningar ser man mellan den övre elektroden och plattan ett ljusfenomen, som har ett maximum i plattans mitt och avtar mot noll vid ändarna. Då plattan är understödd vid ändarna, bildas i detta fall i mitten en svängningsbuk, som motsvaras av ljusmaximum, och i ändarna noder, där ljusstyrkan är noll. Ljusfenomenet ger således en bild av den stående elastiska halvvågen. På grund av den ringa dämpningen kan man inställa utomordentligt skarpt på resonans; då har ljusstrimman sin största längd. Inställningen kan ske på 0,01 % när. Denna optiska metod kan också brukas för plattans översvängningar. Man använder då lämpligen lika många elektrodpar, som ordningsnumret anger, på det sätt, som fig. 11 a, b visar. Elektroderna förbindas korsvis, vilket tecknen i fig. åskådliggöra. Fig. 12 visar fördelningen av tryck och laddning längs plattan vid övertonen $3n$. I detta

fall uppträda tre ljusmaxima på de delar av plattan, där laddningen är störst (se den undre bilden i fig. 12). Ljusfenomenet beror på de spänningar, som uppkomma i kristallen på grnnd av den inversa piezoelektriska effekten. Dessa spänningar äro så stora, att de vid det låga gastrycket kunna genom jonisation ge upphov till glimurladdning. I ett senare arbete ha GIEBE och SCHEIBE angivit en ny typ för kvartsresonatorn, som är lämplig som frekvensnormal på ett laboratorium (se fig. 13). En kvartsplatta av 80 mm längd, 3 mm bredd och 1,5 mm tjocklek är med

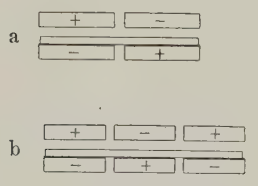


Fig. 11. Kvartsresonatorer med flera par elektroder. a ger svängningstalet $2n$, b $3n$.

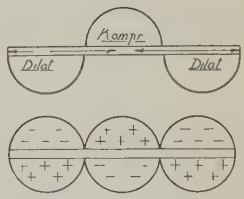


Fig. 12. Fördelning av trycket (den övre fig.) och laddningen (den undre) längs en kvartsresonator vid den tredje översvängningen ($3n$).

silkestrådar (s), upphängd i ett evakuerat glaskärl. Hållaren (h) är fästad i en metallhylsa. Elektroderna (E_1, E_2) sitta mitt emot varandra vid kristallens mitt på ett avstånd av några tiondels millimeter från plattan. Deras utsträckning i plattans längdriktning är endast 2 mm. Tilledningstrådarna förlöpa vinkelrätt mot teckningens plan och sluta i insmälta platinatrådar. Glaskärlet är fyllt med neon till några millimeters tryck. Den anlagda växelspänningen ligger mellan 30 och 100 volt. Den skarpaste inställningen på resonans erhålles, då spänningen är så låg, att endast toppvärdena i växelspänningen räcka till för alstrandet av glimurladdningen. Inställningsskärpan anges då till några tusendels procent. Normalen kan användas för grundsvängningen och översvängningar med udda ordningstal. I uppsatsen anges frekvensen för n, $3n \ldots 21n$. Den högsta övertonen visar 21 ljusmaxima. Fig. 14 visar ljusfenomenet för några översvängningar. Normalen kan således användas för tio olika

våglängder i intervallet 8 805 till 423,46 m. Som förut nämnts, äro frekvenserna ej exakta mångfalder av grundfrekvensen. I stället för $21n$ erhålles $20{,}79n$.

Om en kvartsresonator försättes i kraftiga longitudinella vibrationer med svängningsmaximum i pattans fria ändytor (*abfe* och *dcgh* i fig. 1) alstrar den i det omgivande mediet akustiska vågor med konstant svängningstal och amplitud. P. LANGEVIN har 1917 tillämpat denna metod i

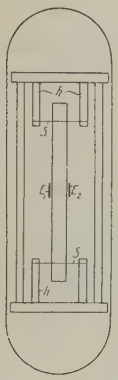


Fig. 13. Frekvensnormal enligt GIEBE och SCHEIBE. Kvartsplatta med två korta elektroder (E_1E_2) i ett evakuerat glaskärl.

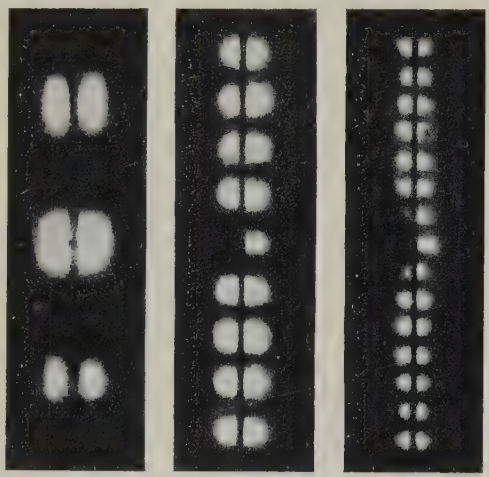


Fig. 14. Ljusfenomen vid GIEBE och SCHEIBEs optiska metod. Översvängningar med ordningstalen 3, 9, 15 hos en kvartsresonator enligt fig. 13.

en apparat för mätning av havsdjup, ekolodningen. För att närmare belysa användningen av kvartsresonatorn som sändare och mottagare av akustiska vågor skall jag i korthet referera två undersökningar på detta område. G. W. PIERCE använde 1924 som oscillator en rörsändare av det utseende, som framgår av fig. 15. Kvartsplattan försättes i kraftiga längdsvängningar och från dess fria yta vid B utsändes akustiska vågor med konstant svängningstal och amplitud. Våglängden λ_a i luft motsvarande grundsvängningen är approximativt

$$\lambda_a = 0{,}12 \cdot l.$$

Vinkelrätt mot vågornas utbredningsriktning placeras en

reflekterande skärm, som kan förflyttas på olika avstånd (a) från kristallens fria yta. Mellan denna och skärmen uppkommer då en stående vågrörelse, och PIERCE mäter den återverkan, som vågen utövar på kristallens svängningsamplitud. Som mått på denna återverkan använder han strömstyrkan i anodkretsen, som avläses på en mikroampèremeter A (se fig. 15). Fig. 16 visar, hur anodströmmen varierar vid olika avstånd mellan skärm och kristallyta. Försöket är utfört i kolsyra. Strömstyrkan genom-

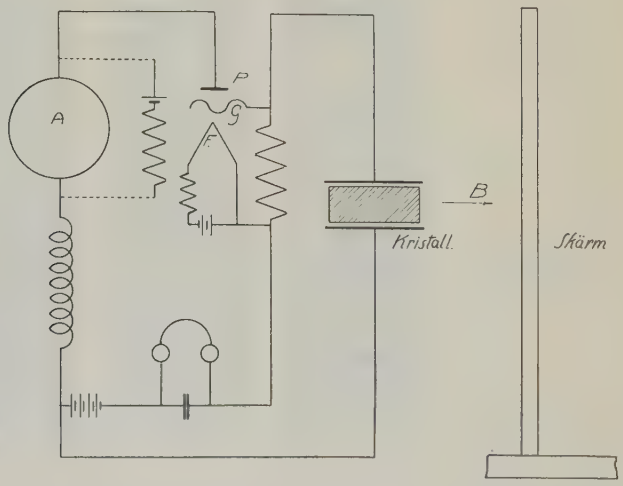


Fig. 15. Anordning av PIERCE för studiet av akustiska vågor, som alstras av en kvartsresonator. Till vänster elektronrör med en mikroampèremeter (A) i anodkretsen. Till höger en reflekterande skärm.

löper en serie maxima och minima, vilkas lägen kunna noggrant bestämmas. Vid minima är avståndet (a) bestämt genom relationen

$$a = m \frac{\lambda}{2},$$

där m är ett helt tal. Återverkan på kristallens svängningar är således störst, då avståndet är ett helt antal halva våglängder. Ur dessa kurvor kan PIERCE noggrant bestämma våglängden och, då frekvensen mätes med en annan metod, även beräkna ljudets hastighet i kolsyra. De svängningstal,

som här förekomma, äro mycket höga, 42 000 till 610 000. Vi äro således långt ovanför de hörbara tonernas gräns. PIERCE använde även en annan sändareanordning, vid vilken de transversella svängningarna alstrade de akustiska vågorna. Vi kunna tänka oss kvartsresonatorn i fig. 15 så belägen, att beläggningarna äro parallella med skärmen. I mitten av den närmast skärmen anbragta elektroden är ett hål upptaget. Kristallen försättes i transversella svängningar med en svängningsbuk i mitten. De vågor, som alstras på detta sätt, ha ännu högre svängningstal, ända upp till 1 480 000. De absorberas starkt av kolsyran. PIERCE anser

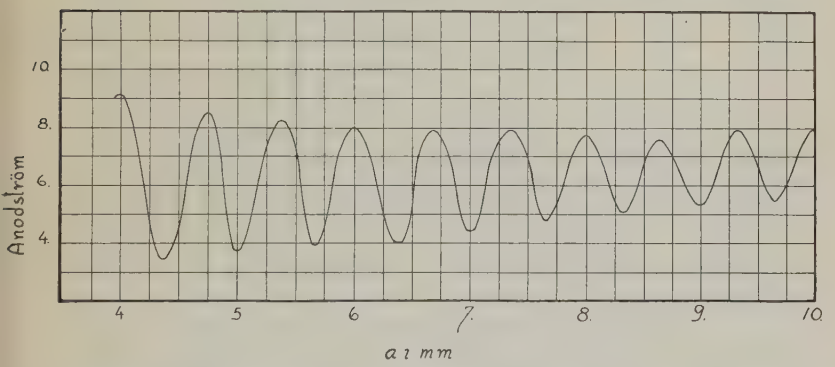


Fig. 16. Anodströmstyrkan vid anordningen enligt fig. 15 som funktion av avståndet (a) mellan den fria kristallytan och den reflekterande skärmen. Avståndet mellan två minima är halva våglängden i den omgivande gasen, kolsyra. Svängningstalet för de akustiska vågorna är 205 620.

sig ha funnit, att ljudets hastighet i kolsyran ökas med växande frekvens.

En annan akustisk undersökning av stort intresse har utförts i Jena 1928 av F. W. HEHLGANS. Han har ingående studerat kvartsresonatorns verkningssätt som sändare och mottagare för akustiska vågor; hans arbete visar, vilken stor betydelse de piezoelektriska metoderna äga för studiet av akustiska problem. Som sändare använde han en rör-oscillator, som induktivt kopplades till en svängningskrets av CADYS typ (se fig. 5). I denna figur låta vi spolen L före-

ställa oscillatorns induktionsspole. Oscillatorn och svängningskretsen till höger i fig. 5 avstämmas noggrant för kvartsresonatorns egenfrekvens. Kristallens fria ytor alstra akustiska vågor i den omgivande luften. Mitt emot denna kvartskondensator uppställde HEHLGANS en annan med denna identisk som mottagare. Ljudvågorna träffa mottagaren och uppväcka dess längdsvängningar, då de båda kvartsresonatorerna ha samma egenfrekvens. Mottagarens belägganingar stå i förbindelse med en likriktare och en galvanometer (se fig. 17), som noggrant kalibreras. Med denna anordning kan den infallande ljudvågens intensitet mätas[1]. Vi ha således i kvartsresonatorn ett nytt medel för intensitetsmätningar inom akustiken. Med denna anordning har HEHLGANS utfört böjningsförsök, som motsvarar de optiska vid en eller flera spalter, och verifierat de lagar, som inom optiken gälla för dessa klassiska försök.

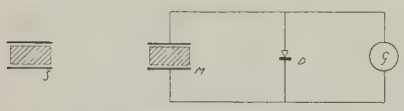


Fig. 17. Kvartsresonator (M) som mottagare av akustiska vågor. Kvartskondensatorn till vänster (S) alstrar de akustiska vågorna, vilkas intensitet mätes med kretsen till höger. D är en detektor, G galvanometer.

GIEBE och SCHEIBE ha i ett senare arbete även undersökt andra svängningstillstånd hos kvartsresonatorn än de förut angivna och därmed utvidgat problemet om den piezoelektriska resonansen. De lyckades framställa torsions- och transversalsvängningar i olika riktningar med överssvängningar av mycket högt ordningstal. Materialet bestod av kvartsstavar med olika orientering av axeln och ringar av rektangulärt tvärsnitt med ringplanet vinkelrätt mot kristallens optiska axel. Vid stavarna användas vanligen två par korta elektroder i stavens mitt orienterade på olika sätt. Fördelen med deras nya metoder ligger framför allt däri, att en och samma stav kan försättas i svängningar av olika slag och därigenom tjänstgöra som normal för

[1] Intensiteten hos ljudvågen är proportionell mot medelvärdet på strömstyrkans kvadrat i den krets, som innehåller kvartsresonatorn och likriktaren. Detta medelvärde har vid kalibreringen befunnits proportionellt mot utslaget på galvanometern.

ett stort antal frekvenser. De ha dessutom genom användning av transversella svängningar utvidgat frekvensområdet ända ned till så låga svängningstal som 800. Man förfogar således över piezoelektriska normaler för hörbara frekvenser; dessa kunna vid noggranna mätningar ersätta de rätt bristfälliga stämgafflarna av stål. GIEBE och SCHEIBE ha med 8 cm långa kvartsstavar lyckats få fram översvängningar med så högt ordningstal som femtio.

Biokemiska arbetsmetoder och problem.

Av SAMUEL HENNICHS.

Inledning.

Forskningen inom den oorganiska kemien har, som bekant, fört till kännedom om ett 90-tal grundämnen, bildande cirka 30 000 kemiska föreningar med varandra, såsom syror, salter eller baser. Denna forskning har efter uppställandet av grundämnenas periodiska system år 1869 alltmer blivit inriktad på atomfysikaliska spörsmål.

Den organiska kemien har alltsedan 1800-talets senare hälft utgjort ett mycket rikt forskningsområde, då kolet, tack vare sin förmåga att binda sig självt, tillåter uppkomsten av cirka 500 000 kemiska föreningar. Då det lyckats att laboratoriemässigt framställa många av de ämnen, man förr isolerade ur växt- och djurmaterial, har därmed den gamla uppfattningen, att dessa ämnens syntes skulle betingas av närvaron av levande vävnad, fallit. Beteckningen organisk kemi bibehölls dock i anledning av mängden kolföreningar. Bland dessa hava många funnit användning såsom färgämnen, läkemedel m. m.

Studiet av bland annat kinetiken för de reaktioner, som leda till uppkomsten av kemiska föreningar samt de kvantitativa förhållandena därvid, utgör en särskild gren av den kemiska vetenskapen, nämligen den fysikaliska kemien.

Utvecklingen har nu blivit mogen för utforskandet av »livets kemi»: den biokemiska forskningen att finna de vägar på vilka naturen uppbygger kolhydrat, fett och äggviteämnen i växtvärlden med vatten, kolsyra och ammoniumsalter som utgångsmaterial och spjälkar de bildade ämnena i djurorganismen till kolsyra, vatten och urinämne.

För utlösandet av dessa reaktioner inom organismen är denna försedd med speciella hjälpmedel, katalysatorer, bland vilka enzym, hormoner och vitaminer torde vara de viktigaste.

Med *enzym* eller *ferment* menas ämnen från växt- eller djurriket, vilka kunna påskynda kemiska reaktioner såväl inom det organ eller den cell, varifrån de stamma, som utanför dessa.

Med katalysator menas ett ämne, som påskyndar en kemisk reaktion utan att själv förbrukas vid densamma.

En ideal katalysator skulle även vid närvaro i mycket ringa mängd kunna åstadkomma en obegränsad omsättning.

Enzymens verksamhet är emellertid i vissa fall tämligen begränsad, beroende på flera orsaker: många av de utlösta reaktionerna leda till ett jämviktsläge, enzymen kunna bliva inaktiverade av de reagerande eller bildade ämnena o. s. v.

Som närmaste mål framstår sålunda att renframställa enzymen, att utforska deras kemiska och fysikaliska egenskaper samt att utröna orsaken till deras katalytiska förmåga.

Varje enzym har sin mycket speciella uppgift; man talar om enzymens utpräglade specifitet. De olika reaktionerna skola därefter ställas i samband med varandra, tills bilden av omsättningen i organismen blir fullständig.

I det följande kommer först att redogöras för de moderna metoderna att karakterisera och renframställa enzympreparat. Därefter skall lämnas en kort översikt över mera anmärkningsvärda enzym och deras verkningssätt.

Då enzymkemien är inriktad på lösandet av kemiens centralaste problem torde en bredare framställning av densamma i skolan vara på sin plats. Till sist skall därför lämnas förslag till skolförsök, avsedda att beledsaga denna framställning.

I en senare uppsats skall ett mycket aktuellt biokemiskt problem behandlas, nämligen frågan om reaktionsmekanismen vid biologiska oxidationer.

I. Karakterisering av enzympreparat.

För renframställning av enzym erfordras en metod att jämföra olika organs och enzympreparats aktivitet.

Man antager a priori, att enzymhalten är proportionell mot enzymverkan. Den första uppgiften blir alltså att genom variation av de faktorer, som inverka på föreliggande biokemiska process utröna möjligheterna för uppställandet av en strikt definition på enzymets aktivitet. Är denna uppställd, undersökas olika organ på sina aktiviteter, hänförda till den fastslagna enheten. Det organ, som då uppvisar största halten och tillika tillåter extraktion av enzymet med gott utbyte, väljes till utgångsmaterial. De erhållna extrakten underkastas fortsatt reningsarbete. Värdet av de metoder, som härvid komma till användning, kan sedan jämföras, om aktiviteten bestämmes på erhållna enzymlösningar och restlösningar enligt samma metod.

De av enzymen katalyserade reaktionerna bestå i allmänhet däruti, att ett ämne under enzymets inverkan undergår sönderdelning. Mera sällan föreligger syntetisk verksamhet.

För att kunna följa reaktionens gång måste i de flesta fall stickprov uttagas ur reaktionsblandningen och undersökas på sin halt antingen av det ämne, som spjälkas, eller något av de bildade ämnena. Härvid väljer man enklast möjliga analysmetod (titrering, eventuellt volymbestämning av bildade gaser o. s. v.). Med kännedom om utgångskoncentrationen och de bestämda koncentrationerna efter kända tider kan reaktionshastigheten beräknas, i vissa fall enligt följande formel:

$$K = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a - x}$$

t = tid i minuter, a = ursprunglig substratkoncentration, x = vid tiden t omsatt mängd.

Formeln förutsätter som bekant, att reaktionshastigheten i varje ögonblick är proportionell mot koncentrationen av

det ämne, som undergår spjälkning. Denna förutsättning visar sig i de flesta fall åtminstone praktiskt taget uppfylld, varför de olika värdena på reaktionskonstanten, beräknade ur de olika koncentrationsbestämningarna, överensstämma. Konstanternas medeltal begagnas för de fortsatta beräkningarna.

Reaktionshastigheten vid enzymatiska omsättningar har visat sig vara beroende av följande faktorer: 1) enzymkoncentrationen, 2) koncentrationen av det ämne, som skall spjälkas (substratet), 3) aciditeten, 4) temperaturen och 5) eventuella aktivatorer och hämningskroppar.

I definitionen på aktiviteten skall därför exakt angivas, inom vilka gränser dessa faktorer få variera.

Vad enzymkoncentrationens inverkan beträffar, har reaktionshastigheten i det stora hela visat sig vara proportionell mot mängden tillsatt enzympreparat av samma aktivitet. Den senare angives genom torrsubstansbestämning på enzymlösningarna vid 100 °.

Studiet av reaktionshastighetens beroende av substratets koncentration har lett till en glänsande teori, vilken befunnits vara fruktbar även vid dess tillämpning på icke-biokemiska katalysfenomen (H. von Euler).

Enzymaktiviteten, konstruerad som funktion av substratkoncentrationen lämnar till resultat en dissociationsrestkurva. Den aktiva substansen är alltså sannolikt en förening mellan enzym och substrat (Michaelis och Menten).

För den praktiska aktivitetsbestämningen uppsökes ett substratkoncentrationsgebit, där reaktionshastigheten antingen är oberoende av eller omvänt proportionell mot substratkoncentrationen.

Sörensen har i epokgörande undersökningar ådagalagt, att enzymens verksamhet i hög grad är beroende av reaktionsblandningens aciditet. Detta förklaras så, att enzymen äro elektrolyter, vanligen amfotera sådana, och att de substratbindande grupperna skulle vara aktiva antingen endast i de dissocierade eller i de odissocierade molekylerna. Under i övrigt konstanta försöksbetingelser varierar

alltså enzymaktiviteten med aciditeten på sådant sätt, att en uppåtgående fas inom det sura området för till ett mer eller mindre utsträckt maximum vanligen i närheten av neutralpunkten, varefter en nedåtgående fas följer på basiska sidan.

Michaelis har riktat vetenskapen med utomordentliga metoder att bestämma en lösnings aciditet. Sörensen har bland andra angivit metoder att genom lämpliga tillsatser av salter hålla en reaktionsblandning vid konstant aciditet under reaktionens gång, även om densamma skulle föra till bildning av syror eller baser. Dessa tillsatser kallas puffrar. Vätejonkoncentrationen uttryckes lämpligast i digniteter av 10 och angives enklast medelst motsvarande exponent med ombytt tecken (p_H).

Vid aktivitetens bestämning upprätthålles en aciditet, som faller inom det maximala området. Man säger, att man arbetar vid »optimalt p_H».

Som allmän regel gäller, att hastigheten av kemiska reaktioner stiger med temperaturen. Detta håller även streck vid enzymatiska omsättningar. Härvid inträder emellertid en särskild komplikation, i det att enzymen äro temperaturkänsliga och t. o. m. kunna fullt inaktiveras genom en timmes upphettning till 60—80 °. Även tidigare kan emellertid den höga temperaturen inverka menligt på reaktionsförloppet. I varje särskilt fall måste därför temperaturens inverkan undersökas och den lämpligaste upprätthållas med tillhjälp av reaktionskolvarnas nedförande i termostat.

Slutligen kunna främmande ämnens närvaro underlätta, ja, rentav betinga eller ock försvåra, resp. förhindra föreliggande reaktion. De förra kallas aktivatorer, de senare hämningskroppar. Vid aktivitetsreaktionerna böra aktivatorerna närvara i sådan mängd, att största möjliga omsättning åstadkommes. Hämningskropparna böra naturligtvis om möjligt undvikas.

Har man sålunda funnit de lämpligaste betingelserna för reaktionen, fastslås dessa genom definition. Enzympreparatets aktivitet beräknas såsom kvoten mellan erhållen

reaktionskonstant och använd torrsubstans enzympreparat i det fall, att reaktionskonstanten är oberoende av substratkoncentrationen. Föreligger omvänd proportionalitet mellan dessa, beräknas den såsom kvoten mellan produkten av erhållen reaktionskonstant och ursprunglig substratkoncentration samt använd torrsubstans enzym.

H. von Euler har angivit dessa riktlinjer för exakt aktivitetsberäkning samt undersökt förutsättningarna för deras genomförande på flertalet enzym.

Enzymens renframställning.

Sedan sålunda efter ett omfattande primärarbete problemet rörande exakt enzymatisk aktivitetsbestämning på detta tillfredsställande sätt förts i hamn, trädde kravet på enzymens renframställning alltmer i förgrunden. Man ansåg, att studier av t. ex. aktivitets-p_H-kurvan och förgiftningsundersökningar, de senare med bestämning av enzymens aktiva grupper såsom mål, företagna med enzympreparat, om vilkas renhet man svävade i fullständig okunnighet, ej kunde leda till bestående resultat.

Emellertid hava dessa farhågor i viss mån befunnits obefogade.

Så har aktivitets-p_H-kurvan fullständigt samma förlopp, bestämd för sackarasverkan hos jäst, som för en enzymlösning med 1000 gånger så hög aktivitet. I många fall ändras däremot aciditetsoptimum starkt vid enzymets rening. Förgiftningsförhållandena variera ej kvalitativt men väl kvantitativt med renhetsgraden. Enzymens renframställning står likväl alltjämt såsom en huvuduppgift på den biokemiska forskningens dagordning.

Till en början sökte man genom fällning och dialys öka aktiviteten hos de extrakt, man beredde sig ur utgångsmaterialet, det må nu vara hämtat från växt- eller djurriket. Dessa metoder ha fortfarande sin givna användning.

Ett stort steg framåt var Willstätters upptäckt, att vissa ämnen i svagt sur lösning adsorbera mer enzym än föroreningar och vid basisk reaktion åter avgiva enzymen

till lösningsmedlet. Främst bland dessa ämnen stå kaolin och aluminiumhydrat, beredda enligt särskilt förfaringssätt. Dessa ämnen äro ju också förut kända från färgkemien som goda adsorptionsmedel.

. Genom upprepad användning av bemälda adsorptionsmetoder, eventuellt genom växling av desamma, hava enzympreparat erhållits, vilkas aktivitet överskrida det ursprungliga organets 300—1000 gånger. Deras sammansättning varierar mindre vid stegrad renhetsgrad. Man har t. o. m. i vissa fall kunnat påvisa bestämda kemiska radikaler hos dem, om också en fullständig kännedom om den kemiska sammansättningen ännu hör framtiden till.

Då de sista produkterna vid renframställningen erhållas i mycket ringa mängd, hava härigenom mikrokemiska analysmetoder framtvingats (Pregl). Hos sackaras, det bäst undersökta enzymet, tror man sig genom s. k. förgiftningsförsök hava bevisat förekomsten av en aminogrupp och en karbonylgrupp (H. von Euler och K. Myrbäck).

Dessa goda resultat hava uppnåtts endast därigenom, att vår tids yppersta kemister, bland dem många nobelpristagare, såsom Willstätter, Meyerhof, Wieland, Windaus och andra ägnat sina krafter åt biokemisk forskning.

Enzymens verksamhetsområde.

Enzymens verksamhetsfält är ännu knappast överskådligt.

Först möter då den process, vid vilken i gröna växtdelar stärkelse bildas ur kolsyra och vatten, den s. k. kolsyreassimilationen. Denna utgör det första stora steget från oorganiskt material till organiskt.

Kolsyreassimilationen är en fotokemisk process (d. v. s. en reaktion, som fordrar strålande energi), vid vilken klorofyll utgör katalysator. Klorofylls sammansättning är sedan länge känd såsom en magnesiumförening av ett organiskt ämne med 5 pyrrolkärnor. Däremot är gången av stärkelsebildningen alltfort föremål för forskning.

Allt synes tyda på, att kolsyran reduceras till formaldehyd, HCHO, vilken sedan kondenseras till derivat med 6 kol-

atomer. Dessa kolhydrat polymeriseras under vattenutträde till stärkelse. Huru många hexosmolekyler härvid sammanslås, är okänt och därmed sålunda stärkelsens molekylarvikt. Av det primärt bildade sockret framställer sedan organismen fett och äggviteämnen.

H. von Euler tänker sig följande förlopp av fettbildningen i växter, nämligen: 1) Socker undergår en zymasspaltning till acetaldehyd. 2) Upprepad aldolkondensation sammanfogar ett större eller mindre antal acetaldehydmolekyler till oxialdehyder av aldoltyp. 3) Dessa övergå till omättade aldehyder genom vattenavspjälkning. 4) Genom svag oxidation övergå dessa till motsvarande syra, som 5) under anlagring av väte övergår i fettsyror.

$$CH_3CHO + CH_3CHO = CH_3CH(OH) - CH_2CHO$$

$$\xrightarrow{-H_2O} CH_3CH = CHCHO \xrightarrow{+O} CH_3CH=CHCOOH$$

$$\xrightarrow{+H_2} CH_3CH_2CH_2COOH$$

3 molekyler aldehyd bilda sorbinsyra, vilken påvisats i växter.

Man har också förmodat, att pyrodruvsyra skulle hava något med saken att göra.

Dessa alifatiska syror bilda sedan fett med glycerin. Huru dessa syror med de ammoniumsalter eller nitrat, vilka växterna via rötterna tillgodogöra sig, kunna bilda aminosyror för att av de senare uppbygga äggviteämnen, hör till det ännu outforskade. Man skulle kunna tänka sig, att till de intermediärt bildade, omättade syrorna ammoniak anlagras.

Den i växterna bildade stärkelsen utgör omedelbar föda för djuren. Människans behov tillgodoses genom bland annat mjöl och potatis. Inkommen i matsmältningsorganet, underkastas stärkelsen omedelbart hydrolys, i första hand till dextriner, sedan till maltos och glykos. Här föreligger också enzymverkan. Glykosen resorberas i tarmen. Den användes sedan av kroppen till förbränning för upprätthållande av

kroppstemperaturen, polymeriseras till glykogen för upplagring i levern eller utgör utgångsmaterial för bildning av äggvita eller fett, den förra till åstadkommande av muskler och ersättningsvävnad, det senare för skyddande av de inre organen och för värmeisolering.

Angående fettbildningen i organismen hava flera teorier uppställts. Man har t. ex. antagit (Nencki) acetaldehyd som utgångsmaterial, vilken sedan skulle undergå upprepad aldolkondensation.

På kroppens tillstånd före födans intagande beror, vilketdera av dessa alternativ, som överväger.

Alla dessa reaktioner åstadkommas genom enzym.

Det enzym, som verkar spjälkande på stärkelse, kallas amylas. Det förekommer i både växter och djur, hos de förra i alla gröna delar, men särskilt i frön. Groningen av korn verkar ytterst befordrande på amylasbildningen, varför malt fått teknisk betydelse för bryggerierna.

I djurorganismen uppträder amylas redan i saliven och kallas här ptyalin. Bukspottkörteln levererar tarmens amylas. Denna körtel har blivit utgångsmaterial för beredning av insulin, det specifika läkemedlet mot sockersjuka. Dettas uppgift vid kolhydratspjälkningen skall senare behandlas.

Ptyalinet har natriumklorid till specifik aktivator. Reaktionen leder till ett sluttillstånd, motsvarande 70—80 % spjälkad stärkelse. Amylas utgör möjligen ett komplex av enzym, då spjälkningen av stärkelse, som alltså påbörjas i munhålan och fullföljes i tarmen, består av flera led, nämligen: stärkelsens lösning, dextrinbildning, maltosbildning och glykosbildning. I munhålan råder svagt alkalisk reaktion mot lackmus, i magsäcken starkt sur och i tarmen starkt alkalisk.

I lever finnes ett annat enzym, som bygger upp glykogen av den genom tarmväggen resorberade glykosen.

Det i vitbetor och sockerrör bildade rörsockret måste, innan det av kroppen tillgodogöres, först spjälkas, och härvid erhålles druvsocker och fruktsocker. Det till denna reaktion hörande enzymet heter sackaras. Dess förnämsta

förekomst är i jäst. Detta är det mest undersökta av alla enzym och återfinnes i alla växtdelar och hos djur, företrädesvis i tarmen.

I växterna förekommer bildning av fett, dock ganska sparsamt. Hos växtätande djur produceras fett i större utsträckning. Detta fett tjänar människan och de köttätande djuren till föda. Det användes till förbränning för uppehållande av kroppstemperaturen och till alstrande av vissa egna fettämnen.

Fetterna spjälkas därför i magsäcken till fettsyror och glycerin. Reaktionen åstadkommes av enzymet esteras, som förekommer i magsäcken (under namn av lipas) och i tarmen med bukspottkörteln som leverantör. I växtvärlden träffas enzymet i oljebildande frön, t. ex. från Ricinusarter.

I tarmväggen resorberas fettsyrorna och glycerinet, varefter dels fett åter alstras, dels fettsyrorna och glycerinet förbrännas.

Den tredje komponenten i människans föda är äggviteämnen. De frambringas i växtvärlden och i växtätande djur.

Äggvitan koaguleras av löpet i magsäcken och spjälkas av pepsin enzymatiskt till peptoner, vilken spjälkning fortsättes i tarmen av enzymen trypsin och erepsin till aminosyror. I tarmväggen resorberas aminosyrorna, varefter äggviteämnen åter uppbyggas.

Allt tjänligt, som inkommer i matsmältningsorganen, spjälkas således i sina byggstenar, även om en del åter uppbygges till samma klass av ämnen. Detta förhållande beror därpå, att varje särskild organism fordrar sina speciella äggviteämnen, fett och kolhydrater. Dessa uppbyggas alltså av organismen själv med spjälkningsprodukterna till motsvarande förtärda ämnen som utgångsmaterial.

Till sist resorberas enzymen i tarmen, för att organismen icke skall gå dem förlustig.

De härovan nämnda enzymen äro komplexer av katalysatorer. Vid studiet av kemiska reaktioner gör man i allmänhet den upptäckten, att dessa sönderfalla i flera delreaktioner. Och vid omsättningen i organismen finnas enzym, tillordnade dem alla.

En stor grupp enzym ombesörjer sockers förjäsning till alkohol och kolsyra. Studiet härav har i hög grad fördjupat kännedomen om sockerarterna.

Om jäst uppslammas i vatten, och toluol tillsättes, inträder autolys, d. v. s. cellerna sönderspränga, och bl. a. enzymet sackaras går i lösning. Detta enzym ombesörjer, som nämnt, reaktionen: rörsocker + H_2O → druvsocker + fruktsocker.

Vid autolysen inaktiveras det enzym, zymas, som åstadkommer alkoholjäsningen. Man har lyckats, att genom jästens rivning med sand och prässning tvinga zymas att lämna cellerna och att med prässaften erhålla cellfri jäsning. Dock kan kanske zymasens verkan i viss mån vara beroende av cellvävnaden.

Genom extraktion av jäst med vatten vid 80° eller av torrjäst vid vanlig temperatur har man lyckats extrahera en aktivator för zymasen, som befunnits vara mycket temperaturbeständig. Denna har blivit benämnd Co-zymasen. Vid frånvaro av densamma upphör zymasverkan fullständigt.

För jäsningsreaktionen är vidare närvaron av fosfat nödvändig. Ett av de första leden av reaktionen är nämligen bildandet av ett difosfat av glykos, benämnt zymofosfat.

Av jästens övriga enzym äro dess reducerande enzym, som oxiderar zymofosfatet med tillhjälp av metylenblått, samt det enzym, som åstadkommer Schardingers reaktion med acetaldehyd, mest undersökta.

För dessa sista tre enzym har Co-enzymet visat sig vara gemensam nödvändig aktivator. Co-enzymet har kunnat renframställas i hög grad (H. von Euler och K. Myrbäck).

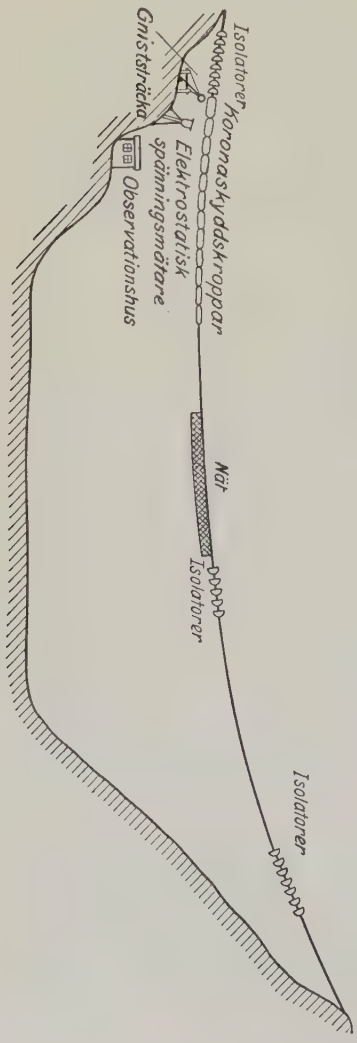
Dessutom förekomma hos jäst katalasverkan, amylasverkan m. fl. enzymverkningar.

En annan grupp enzym, som ombesörjer oxidation i organismen, kommer att behandlas i en följande uppsats.

Dessutom finnas ett oerhört stort antal enzym, som utlösa reaktioner av mindre central betydelse än den, som kan tilläggas ovan berörda.

(forts.).

En metod att med luftelektricitetens hjälp uppnå ytterst höga spänningar.



En ny metod för att uppnå ytterst höga spänningar har nyligen utexperimenterats av tre tyska fysiker, A. BRASCH, F. LANGE och C. URBAN. Den beskrives i »*Naturwissenschaften*» för 1928 sid. 115 och för 1929 sid. 228. Försökens ändamål var att uppnå tillräckligt höga spänningar för att utföra atomsprängningsförsök med kanalstrålar i stället för α-strålar, emedan man på detta sätt skulle få ojämförligt mycket större utbyte. Då det skulle vara förenat med mycket stora kostnader att försöka uppnå tillräckligt höga spänningar på det vanliga sättet med kaskadkopplade transformatorer, valde de en annan väg, nämligen att använda det luftelektriska fältet vid åskväder. En punkt på 100 m höjd över jordytan kan då ha en potential av tiotals millioner volt mot jorden. Försöken böra lämpligen utföras på en ort med stor åskvädersfrekvens; härför valdes Monte Generoso vid Lugano. Sommaren 1927 uppspändes mellan två bergstoppar ett väl isolerat, glesmaskigt och med spetsar försett metalltrådsnät, som för ernående av stora strömstyrkor hade en yta om flera hundra kvm. Nätets höjd över marken var 80 m. Den till spetsarna flytande strömmen leddes av den ena spännlinan till närheten av

ett blixtsäkert observationshus av metall. För att fältstyrkan vid ledningens yta ej skulle bli stor nog för energiförluster genom koronabildning, upptrâddes på denna liksom ett pärlband av ihåliga metallkroppar, vilkas diameter växte i riktning från nätet mot isolatorerna och närmast de senare uppgick till 75 cm. Under de sista av dessa uppställdes ett elektrostatiskt spänningsmätinstrument, som dock gav falska resultat, beroende på att koronabildning och därmed följande rumladdningar ej helt kunde undvikas. I stället mättes spänningen med en gniststräcka om upp till 4,5 m längd. Anläggningen blev färdig så sent på sommaren, att endast ett åskväder drog fram över den under observationstiden; härvid erhölls en regelbunden ström av 4,5 m långa gnistor, ungefär en per sek. under en halvtimme. Sannolikt hade betydligt längre gnistor erhållits, om blott gniststräckan kunnat förlängas ytterligare.

Sommaren 1928 fortsattes försöken med väsentligt förbättrad isolation, varvid långa hamplinor inkopplades i isolatorkedjorna. Spetsarna på nätet avlägsnades. Härvid erhölls ingen konstant likström, men vid blixtslag i antennens närhet frigjordes stora influensladdningar, och betydligt högre spänningar än med den äldre anordningen erhöllos momentant. Gniststräckan kunde nu ökas till 18 m; även vid denna längd erhöllos gnistor, varur spänningen beräknas till 8 millioner volt. Momentanströmstyrkan uppskattades till flera tusen ampère. Ännu högre spänningar skulle sannolikt lätt kunna uppnås, men behövas ej för det avsedda ändamålet.

Parallellt med dessa försök hava utförts försök att konstruera urladdningsrör, som tåla dessa höga spänningar. Här synes ännu mycket vara att göra. Närmare redogörelse för rörens konstruktion lämnas ej i de refererade avhandlingarna, men det nämnes, att en spänning om en million volt uppnåtts.

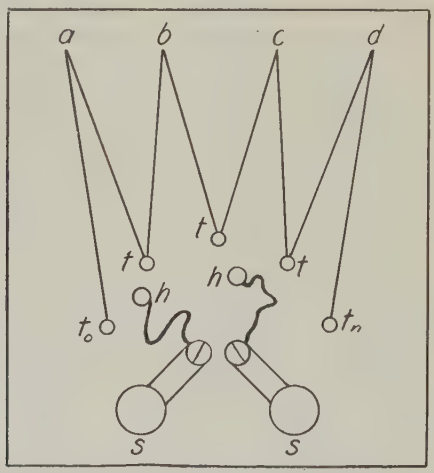
S. Benner.

Hemmagjorda reostater.

Motstånden *a*, *b*, *c*, *d*, äro seriekopplade. De särskilda motståndstrådarnas ändar äro fastlödda vid mässingstrådar, *t*, ett par cm långa och av 4—6 mm diameter; dessa trådar inslås lodrätt i reostatens fotplatta. Från vardera klämskruven, *s*, går en kort, grov kabel, vilken slutar med en hylsa, *h*, som med friktion kan skjutas över mässingstrådarna *t*. En dylik hylsa göres lätt av schablonmässing (eller koppar), som rullas kring ett stycke av mässingstråden och hoplödes. Om man så vill, kan man i stället för mässingstrådar och hylsor montera in jackar med stickkontakter (s. k. banankontakter för radio-

apparater). Ett par extra klämskruvar vid t_0 och t_n möjliggöra shuntkoppling.

Äro motstånden n till antalet, medges $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ kombinationsmöjligheter. Det kan lätt bevisas, att det ej är möjligt att välja de n motstånden så att de $\frac{n(n+1)}{2}$ kombinationerna bilda lika många konsekutiva hela tal utom för $n = 2$ eller $n = 3$.



Här nedan följa några förslag till lämpliga kombinationer. Enheterna äro godtyckliga, men böra naturligtvis vara hela ohm, decimaldelar eller tiofalder av ohm. Motstånden betecknas med a, b, c, d, etc. Vid fyra motstånd erhållas tydligen kombinationerna: a, b, c, d, $a+b$, $b+c$, $c+d$, $a+b+c$, $b+c+d$, $a+b+c+d$.

Tre motstånd. Motstånden $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ ge möjligheterna 1, 2, 3, 4, 5, 6. Enheten 5 ohm ger den ofta praktiska kombinationen 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Fyra motstånd. Motstånden $a = 2$, $b = 1$, $c = 5$, $d = 4$ ge möjligheterna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12; $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 8$ ger 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 15.

Fem motstånd. Motstånden $a = 20$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 2$, $e = 8$ ge möjligheterna 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 15, 20, 24, 25, 27, 35.

Den intresserade kan lätt finna andra lämpliga kombinationer.

B. Berggren.

Till Dopplerska principens metodik.

En gång, då jag ej lyckades att på sedvanligt sätt för en elev klargöra den DOPPLERska principens kvantitativa innebörd, formulerade jag ett rörelseproblem, som befanns hjälpa honom ur svårigheterna. Problemet har gjort god tjänst många gånger, och jag använder det numera alltid såsom inledning till den DOPPLERska principen.

Problemet, till vilket uppslaget erhållits genom framlidne lektor AD. MEYERS uppsats i denna tidskrift, årg. *8*, sid. 95, hade följande lydelse: »På en rak väg promenerar en person T, åtföljd av sina söner A och B, alla jämsides och med hastigheten v m/sek. På avstånd se de en bekant person Ö komma gående mot dem med hastigheten u m/sek. I ett visst ögonblick springer A och τ sek. senare B att möta Ö. Båda gossarna springa med samma hastighet c m/sek. Med vilken mellantid, τ_1 sek. inträffa A och B hos Ö, om T och Ö hela tiden röra sig med oförändrade hastigheter?»

En elev gav en gång följande, som jag tycker, klara och rediga lösning, som måhända kan vara någon läsare till gagn.

A:s och B:s springtider äro T_1 och T_2 sek. respektive. Sedan A skilts från B, förflyter $T_1 + \tau_1$ sek., innan han träffar honom igen, ty han har först sprungit T_1 sek. och sedan gått med Ö τ_1 sek. Under tiden har B först promenerat med sin far τ sek. och sedan sprungit T_2 sek. Tydligen är $T_1 + \tau_1 = \tau + T_2$. Vidare är $cT_1 = u\tau_1 + cT_2 + v\tau$ (en figur var bifogad). Enligt första ekv. är $T_1 - T_2 = \tau - \tau_1$, som insatt i den andra ekv. ger

$$\tau_1 = \tau \cdot \frac{c - v}{c + u}.$$

Det är nu lätt att översätta det givna problemet till ett akustiskt. Ö får beteckna ett öra, T en tonkälla, t. ex. en stämgaffel, och A och B två på varandra följande, av stämgaffeln utsända förtätningar.

Om n är stämgaffelns och n_1 trumhinnans svängningstal, inses, att man kan ersätta τ med $1/n$ och τ_1 med $1/n_1$. DOPPLERS princip för ljudvågor, när sändarens och mottagarens rörelser äro riktade mot varandra, blir alltså uttryckt genom ekv.

$$n_1 = n \cdot \frac{c + u}{c - v},$$

där n betyder den utsända och n_1 den observerade tonens svängningstal.

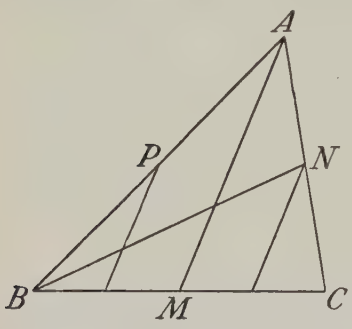
Det torde vara onödigt att här gå in på, hur den givna uppgiften kan varieras för att motsvara andra rörelsetillstånd hos T och Ö.

Torgny Edqvist.

En triangels medianer.

Lektor H. J. PIHL har i *Matematisk Tidsskrift*, Aarg. 1928, 4 Hefte, sid. 104 givit ett utomordentligt enkelt bevis för att medianerna i en triangel dela varandra i förhållandet 1 : 2. Beviset återges här i något modifierad form.

Triangelsidornas mittpunkter betecknas med M, N och P (se fig.) Drag medianen AM och genom P och N linjer parallella med denna. Basen BC är då delad i fyra lika delar, och om BN drages, blir denna delad i tre lika delar; därmed är satsen bevisad.



Har man genomgått likformighetsläran, åberopar man naturligtvis transversalsatsen. Annars har man ju endast att hänvisa till Euklides sats om delning av en sträcka i lika delar. — I stället för att stödja sig på denna sats låter lektor P. eleverna bevisa följande övningssatser, vilka tillämpas på triangeln ABC (sedan genom B och C dragits linjer parallella med AM): 1:o. Om en rät linje överskär en rad parallella ekvidistanta linjer, så äro skärningspunkterna ekvidistanta. 2:o. Dragas parallella linjer genom en rad ekvidistanta punkter på en rät linje, så bli linjerna ekvidistanta.

När man känner medianernas delningsförhållande, erhålles ju omedelbart, att de skära varandra i en punkt. På här angivet sätt kan man således bevisa dessa medianernas egenskaper på ett tidigare stadium, då eleverna ej känna transversalsatsen. Vid behandlingen av trianglars tyngdpunkt kan det t. ex. vara bra att ha ett dylikt ytterst enkelt bevis att tillgå.

C. E. B.

Empirisk kemiundervisning.

Ett genmäle till lektor E. Nordefeldt.

I förra årets decemberhäfte av denna tidskrift recenserar lektor NORDEFELDT undertecknads lärobok i kemi.

I vissa avseenden skänker han den välvilligt gillande. Vad som dock ej vinner hans bifall är bokens planläggning, den historiska ordningen. Han åberopar därvid en för några år sedan i Uppsala hållen diskussion, där, enligt hans utsago, mitt

förslag om historisk lärogång för den första kemiundervisningen utsattes för en mördande kritik »från det mest kompetenta håll». Åsyftade auktoritet ställer han emot WILH. OSTWALD, som pekat på den historiska vägen som undervisningens väg.

Vi skola ej tvista om det svar, som bemälda diskussion, nu liggande ganska långt tillbaka i tiden, kan anses ha givit i vår fråga. Men ingalunda gingo meningarna i den riktning, att en historisk plan *a priori* vore förkastlig utan snarare väl värd att prövas. Tacksamt har också undertecknad sökt för sitt arbete tillgodogöra sig de lärdomar, överläggningen gav som behållning.

Den historiska ordningen är emellertid ej självändamål. Den är blott ett medel att möjliggöra en empirisk kemiundervisning, att bibringa erfarenhetskunskap. Den konventionella lärogången kastar sig nästan med ens in i luft- och förbränningsläran, i gaskemien, sålunda överhoppande det stadium, som historiskt förberedde denna del av kemien. Följden blir, att det kunskapsmaterial, som för densamma ligger till grund, måste anteciperas. Ämnen och reaktioner, änskönt de för nybörjaren äro alldeles främmande, måste upptagas och anlitas, som om de voro gamla bekanta. »Det är», skrev redan LAVOISIER, »i själva verket ett fel, gemensamt för alla kurser och läroböcker i kemi, att de förutsätta kunskaper, som eleven eller läsaren icke förvärvar förrän i det följande.» Exempel äro onödiga att här anföra, då varje kemilärare är medveten om förhållandet och jag f. ö. kan hänvisa till ett i *Berättelsen över läroverkslärareмötet 1922*, sid. 377 o. f., tryckt föredrag i ämnet, samt till ett i år i tidskriften *Skola och samhälle* infört genmäle till lektor B. GUSTAVER.

Frågan, hur sådana föregripanden skulle kunna undvikas, hur undervisningen bäst skulle kunna bygga undan för undan på lärjungens erfarenhet, hur nybörjaren, utgående från det bekanta, därifrån bäst skulle kunna ledas till upptäckt av det obekanta, denna fråga har jag för min del besvarat så: genom en lärogång, i vilken stoffet behandlas ungefär i den ordning, kemien själv behandlat det. För samma ändamål plägar man ju i fysikundervisningen genomgå t. ex. elektricitetsläran efter historisk plan; och biologikursen börjar man med den äldre sortens »naturalhistoria» för att sluta med den nyare biologien: fysiologi och utvecklingslära.

Häri, i den historiska ordningen såsom den bäst ägnade att främja meddelandet av *erfarenhetskunskap*, ligger sakens kärna. Denna har lektor N. i sin recension ej gjort sig mödan att ens vidröra utan stannar vid den periferiska frågan om termerna.

Man vore här frestad anföra TORBERN BERGMANS ord: »Namn göra i sig sjelf ingen ting til saken, allenast de rätt förstås.»

Emellertid, lektor N. är missnöjd med mina preliminära benämningar för t. ex. metalloxider. Jag har funnit det praktiskt att till en början, innan kursen ännu hunnit till syret, i stället för metalloxid säga metallaska: kopparaska, blyaska o. s. v., vilka gamla uttryck (se t. ex. KOPP, *Geschichte der Chemie;* t. o. m. i LAVOISIER's *Traité de Chimie* förekommer t. ex. cendre de plomb) ju omedelbart tillkännage resp. ämnens såväl bildningssätt som beskaffenhet. Lektor N. påstår, att andra läroböcker numera icke använda dylika benämningar, men allmänt i nutida svenska läroböcker återfinner man åtminstone »tennaska» och i så pass förnämliga tyska skolläroböcker som av OHMANN, ARENDT-DOERMER, SCHEID »Bleiasche», »Kupferasche», »Quecksilberasche» etc. — Den »eldsläckande gas», man kan utdriva ur t. ex. kalksten, må väl gärna så betecknas, tills man lärt känna, att den bildas även vid förbränning av kol och att dess lösning i vatten har sur reaktion. — SCHEELE's pregnanta term »eldsluft», nu använd i en del utländska läroböcker (Feuerluft, fire-air), vore det skada att ej även i hans hemland återuppliva; denna benämning bör föregå och gärna bibehållas vid sidan av LAVOISIER's-EKEBERG's onekligen ganska oegentliga, ursprungligen på en missuppfattning vilande och för nybörjaren vilseledande beteckning »syre».

Då lektor N. slutligen om min bok fäller det omdömet, att den synes »väl löslig i framställningen», så blir jag verkligen allvarligt ledsen. Är det någonting, jag själv kan slippa förebrå mig, så är det att ha slarvat med detta mitt mer än tjuguåriga arbete, där jag nedlagt yttersta omsorg på att söka sammanfoga, i smått som stort, de olika delarna, så att lärobyggnaden bleve stabil och allt såvitt görligt finge sitt säkra fäste. Men då hr N. tyvärr ej alls exemplifierar den förmenta lösligheten, saknar jag möjlighet att på denna punkt bemöta honom.

J. F. Nordwall.

Bokanmälningar.

Mathematische Quellenbücher. IV: *Infinitesimalrechnung,* von Dr HEINRICH WIELEITNER, Otto Salle, Berlin, 1929, 160 sid. RM 4: 50.

Det är ej lätt att säga, vilket som är mest beundransvärt, den moderna matematikens symboler, som ge den mest koncentrerade och dock klara form åt ofta mycket invecklade tankeoperationer och begreppssammanställningar, eller förgångna tiders matematiska vetenskap, som trots fullkomlig avsaknad av dessa yttre hjälpmedel kunde nå fram till i många fall storartade resultat. Detta senare tränger sig oemotståndligt på den, som kastar en blick i källskrifterna till den äldre matematiska vetenskapen. En god ledning härvidlag ger det föreliggande arbetet av WIELEITNER, vilket innehåller korta utdrag (i tysk översättning) ur en hel del av de viktigare källorna till infinitesimalkalkylens historia. Dessa utdrag sträcka sig tillbaka ända till EUKLIDES och ARCHIMEDES — det första utdraget rör det s. k. »Archimedes axiom», vilket dock av Archimedes själv anges vara uppställt av någon hans föregångare; möjligen härrör det ytterst från EUDOXOS. Även ARISTOTELES är representerad, nämligen genom en kritik av läran om »atomlinjer», en överflyttning till den rena geometrin av Demokritos atombegrepp. En analogi till dessa atomlinjer möter oss sedan ofta i 1600-talets matematik under benämningen »indivisibler», en slags föregångare, om också i mycket vag form, till differentialbegreppet, varom mera här nedan. Från Archimedes är språnget i tiden långt, i sak snarast omärkligt. Omedelbart på varandra följa nämligen bestämningen av klotets volym enligt ARCHIMEDES och enligt LUCA VALERIO. När de valda utdragen sedan fortsätta med KEPLER, CAVALIERI och TORRICELLI, återfinner man ej den klassiska strängheten i bevisföringen, men matematisk fantasi och kombinationsförmåga leda i stället snabbare fram till en mängd intressanta resultat, och man får nog vara tacksam, att den följande tiden, så rik på uppslag, ej kände sig bunden av en alltför sträng kritik beträffande de begrepp man rörde sig med. Så t. ex. de nyss omnämnda »indivisiblerna». En triangels indivisibler äro hos CAVALIERI dess med basen parallella transversaler, men de synas dock på visst sätt ha två dimensioner. Likaså äro hos TORRICELLI

en rotationskropps indivisibler cylinderytor med samma axel som rotationskroppen, men kroppens volym är summan av dessa indivisibler. TORRICELLI bevisar på detta sätt, att den rotationskropp, som bildas, om en liksidig hyperbel roterar kring sin ena asymptot, ej behöver begränsas åt båda hållen, för att volymen skall ha ändlig och bestämd storlek.

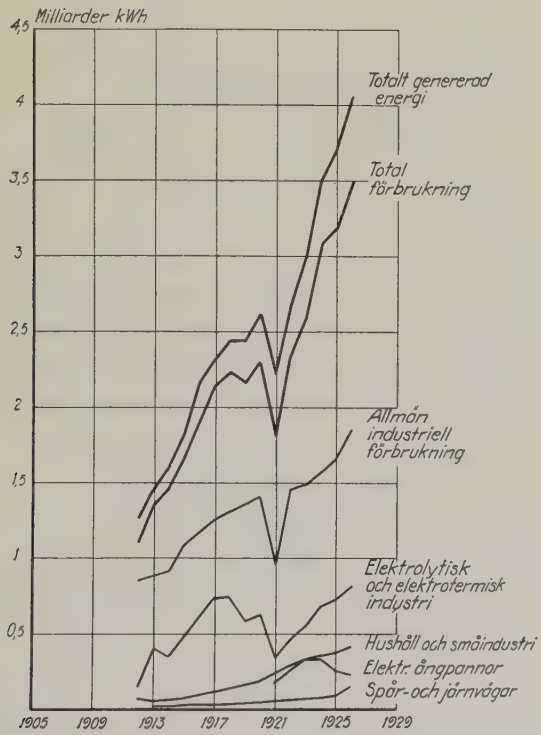
Hittills har det uteslutande varit frågor, hörande till integralkalkylens område, som behandlats. Med FERMATs metod för bestämning av maxima och minima komma ansatser till differentialkalkylen, och hos BARROW (en föregångare till NEWTON) spåra vi sambandet mellan derivata och integral i en korrespondens mellan två kurvor, av vilka den enas ordinata är proportionell mot en av den andra bestämd yta. Om härtill lägges, att PASCAL representeras av ett par satser, ekvivalenta med integration av sinus- och cosinusfunktionerna, LEIBNIZ och NEWTON bl. a. av de äldsta framställningarna av differentialkalkylens metoder, så torde arten och omfattningen av de valda källskriftsutdragen framgå med tillräcklig tydlighet. Men dessa utdrag äro i många fall en rätt så svårsmält lektyr. WIELEITNER har ej heller nöjt sig med dem, utan i väsentlig grad höjt värdet av boken dels genom att förse utdragen med inledande orienteringar, dels genom att också återge dem med nutida matematiskt beteckningssätt. Därigenom blir det hela långt mer njutbart och instruktivt, och det vore glädjande, om dessa rader kunde locka till inköp och läsning av boken. Helt visst behöva många av oss matematiklärare en smula mera av historiskt sinne. En annan sak är, att anläggandet av historiska synpunkter på matematikkurserna vid våra läroverk knappast skulle kunna ske utan förfång för vad som är det väsentliga, bibringandet av klar förståelse för de områden av matematiken, som vi hinna genomgå. Detta kan numera ej ske på annat sätt än genom tidigt inpräglande och ständigt bruk av den nutida matematikens beteckningssätt. Att därvidlag *integraltecknet* icke fortfarande bör förvisas från gymnasiets matematiska utrustning, synes mig vara en ganska blygsam önskan. Även häri har jag blivit styrkt vid läsningen av WIELEITNERs bok.

Olof Josephson.

J. KÖRNER, *Sveriges Elektricitetsverksindustri.* Utgiven av Svenska Elektricitetsverksföreningen, Stockholm 1928. C. E. Fritzes bokh. i distrib., 160 sid., häft. kr. 5:—.

Det är en utomordentligt intressant skildring av den för vårt land så betydelsefulla elektricitetsverksindustrien, som lämnas i

detta verk, utgivet för att hugfästa 25-årsminnet av Svenska Elektricitetsverksföreningens stiftande. Sitt syftemål — att i ord och bild ge en större allmänhet en framställning av denna industris utveckling i vårt land och av betingelserna för dess verksamhet — fyller publikationen på ett synnerligen lyckligt sätt.



Energiproduktionens utveckling och fördelning på olika konsumentgrupper.

Läsaren introduceras i ämnet genom en kort historisk översikt begynnande med de äldsta svenska elektricitetsverkens tillkomst — Härnösand gick i täten 1885, blott två år efter det första verket på kontinenten. Efter uppgifter om de olika distributionssystemens, speciellt trefassystemets genombrott, skildras, hur vattenkraften alltmer togs i anspråk och industrien elektrifierades, varvid statens inträde som företagare på kraftområdet ägnas särskilt utrymme.

I de läsvärda kapitlen *Elektricitetsverken i statistisk belysning* och *Den elektriska energiens användning* belyses — medelst siffror och mönstergilla diagram — den nuvarande produktionen och konsumtionen av elektrisk energi, dess omfattning och fördelning på resp. producent- och konsumentgrupper. Ett par av de diagram, som illustrera dessa kapitel, ha godhetsfullt ställts till tidskriftens förfogande av Svenska Elektricitetsverksföreningen; de tala för sig själva.

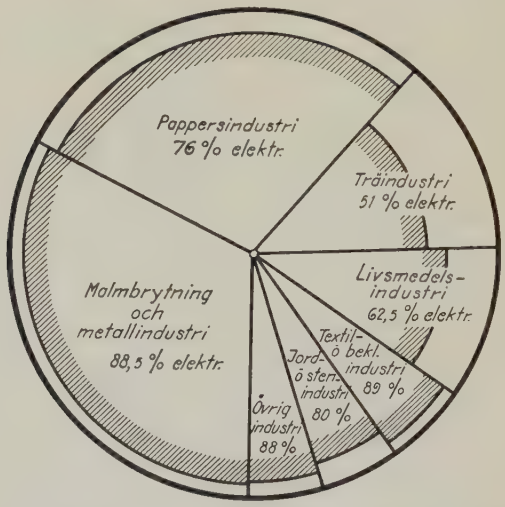


Diagram över de svenska huvudindustriernas elektrifieringsgrad, d. v. s. elektrisk drivkraft i procent av den totala. De av den yttre cirkeln begränsade sektorerna angiva den totala drivkraften, de av streckade inre cirklar begränsade den elektriska delen därav.

Så behandlas elektricitetsverksindustriens olika organisationsformer och samarbetet dem emellan, kraftprisernas utveckling, lagstiftningsfrågor m. m. I ett intressant avslutningskapitel ventilerar förf., vad framtiden kan ha i sitt sköte. Nog tycker man sig ha anledning att se hoppfullt framåt, när den nuvarande energiproduktionen belöper sig på 4 miljarder kWh och en inventering av våra vattenkraftresurser pekar hän mot en totaltillgång av c:a 32 miljarder. Men det gäller att utnyttja och på lämpligt sätt distribuera dessa energibelopp och att rätt bedöma de framtida behoven, och här möta uppgifter och problem, som på ett intresseväckande sätt i korthet belysas och analyseras.

C. E. Blom.

Stockholms Gasverk 1853—1928, Minnesskrift, Stockholm 1928, 195 sid. med 117 ill.

Den 18 dec. 1853 tändes på Norrbro de första gaslågorna i Stockholm. 75-årsminnet av denna tilldragelse och av Stockholms gasverks tillkomst har av verket celebrerats genom utgivandet av en minnesskrift, som under redaktion av dess överingenjör författats av vid verket anställda ingenjörer. Det är således under den mest sakkunniga ledning, som allmänheten får taga kännedom om detta för dess trevnad och komfort så viktiga kommunala verk. På 75 sidor behandlas gastillverkningen, koksen, övriga biprodukter, ledningsnätet och gasmätare. Denna del är väl den, som för tidskriftens läsare är av det största intresset. Framställningen vänder sig visserligen till en bred publik, men innehåller en stor mängd fakta i enkel och lättläst form. För den lärare, som önskar utfylla genomgången av detta kapitel med detaljer från vår modernaste anläggning, bör denna avdelning vara välkommen, likaså för den, som vill ge sina elever litteraturhänvisning för föredrag eller självstudier. Den återstående delen av skriften, om gasens användning i hushåll, industri och hantverk (100 sid.) har kanske mer karaktär av propagandaskrift, men är icke mindre intressant genom sammanställningen av gasens användningsmöjligheter och de goda och säkert välbehövliga råd och upplysningar, som här ges förbrukarna. De avslutande tabellerna och kurvorna visa på ett övertygande sätt verkets obrutna livskraft och betydelse för huvudstadens invånare.

Jakob Kristofferson, *Sprängämnen och skjutvapen förr och nu*, J. A. Lindblads förlag, Uppsala 1928, 160 sid., häft. kr. 3: —

Bokens titel är missvisande så till vida som skjutvapnen behandlas synnerligen summariskt — förf. säger också själv, att han endast skisserar upp ytterkonturerna. Mer än en indelning och en hastig karakteristik av de olika typerna får man här knappast. Den större delen av arbetet behandlar sprängämnena, och här är förf. utförligare och intressantare. Efter en historik, vari Alfred Nobels livsverk får tillbörlig värdesättning, ges en framställning av sprängämnenas allmänna egenskaper och verkningar, därpå en redogörelse för moderna sprängämnen och deras tillverkning. Förf. synes vara sakkunnig på detta område, och denna del av det populärt skrivna arbetet torde vara värd att läsa och att rekommendera.

B. Colbjörnsen, *Om konstgödselmedel och deras framställning.* Serien Teori och teknik, H. Gebers förlag 1929. 257 sid., häft. kr. 5: 75.

En utförlig, välskriven och av allt att döma vederhäftig redogörelse för framställningen av fosfor-, kväve- och kaligödselmedel. Författaren synes vara superfosfattekniker och har i varje fall givit motsvarande del en kanske något bred framställning. Kemiläraren finner i detta arbete en mängd nya och nyttiga upplysningar, bl. a. i fråga om svenska ingenjörers insatser, statistik, givetvis även svensk, ett stort antal bilder, rikhaltig litteraturhänvisning, m. m. Arbetet har sin givna plats i läroverkens och lärjungarnas bibliotek.

Uppfinningarnas bok, del IX, Lanthushållning m. m., trävaru-, textil- och beklädnadsindustri, grafisk teknik. P. A. Norstedt & Söner 1929. 972 sid., 1067 bilder. Klotb. kr. 35: — halvfr. bd kr. 40: —.

Även denna del av den välredigerade nya upplagan innehåller kapitel av stort intresse för skolans lärare och elever, t. ex. lanthushållning och skogsbruk av prof. JUHLIN-DANNFELT, fiske och fiskodling av byrådirektör ALM, träets mekaniska bearbetning av lektor KINMAN, boktryckerikonsten av redaktör OLDENBURG, fotografi och reproduktionsteknik av docent HERTZBERG.

JOHN BOMAN och SVEN WIKBERG, *Läsebok för realskolans högre klasser*. P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1929, 336 sid., klotb. kr. 4: 70.

Anledningen till att denna läsebok omnämnes i dessa spalter är att åtskilligt av dess innehåll faller inom denna tidskrifts intressesfär. Utgivarna ha — genom några och tjugu uppsatser av olika författare — velat ge »skildringar av svensk kultur och svenskt samhällsliv i några av deras betydelsefullaste yttringar under senare år.» I dessa skildringar ha aktuella tekniska och industriella kulturföreteelser fått ett mycket stort utrymme; inemot hälften av uppsatserna falla under denna rubrik: Förbränningsmotorer, Älvkarleby kraftverk, Asea, L. M. Ericsson och telefonindustrien, Svenska kullagerfabriken, Hur de svenska tändstickorna erövra världen, Alfred Nobel, Gustaf Dalén, Radio, Det moderna flygväsendet.

I de fall, där förf. behandla sitt ämne huvudsakligen ur historisk och yttre organisatorisk synvinkel, torde nog eleverna kunna tillgodogöra sig innehållet utan kommentar, i andra fall, då fysikaliskt-tekniska processer beröras, måste artiklarna — t. ex. om förbränningsmotorer — förklaras och illustreras för att bli njutbara, en komplettering, som endast fackläraren torde kunna göra. Utan tvivel är det i dennes hand som flertalet av

dessa uppsatser bäst kunna komma till sin rätt, och det är närmast för att rikta fysik- och kemilärarnas uppmärksamhet på dem som dessa rader tillkommit. En del av uppsatserna lämpa sig väl som ett intressant inslag i den fackliga undervisningen.

I sakligt hänseende synes innehållet vara tillförlitligt, vilket är naturligt, då artiklarna i allmänhet äro författade av fackmän, vilket egendomligt nog ej framhålles i förordet.

Illustrationerna äro många och i allmänhet goda. Dock finner man till sin förvåning, att det erfarna förlaget förminskat kartan över Älvkarlebyverkets distributionsområde så mycket, att den blivit fullkomligt värdelös. En sektionsritning sådan som den på sid. 118 förstå eleverna ej.

HELMER BÄCKSTRÖM, *Lärobok i fotografi.* Wahlström & Widstrand, Stockholm 1929, 159 sid., häft. kr. 3: 25.

När en skolad fotograf, som dessutom är fysiker och erfaren lärare, fattar pennan för att skriva en lärobok i ett ämne, som han behärskar ur alla dessa synpunkter, har man anledning att vänta ett gott resultat. Man blir ej heller besviken, när man tar del av d:r BÄCKSTRÖMs lärobok i fotografi. Den adresserar sig till den stora kretsen av amatörfotografer men är därför på intet sätt ytlig. Den ger nybörjaren en grundlig insikt i fotografiens element, men även den mer erfarne har mycket att hämta ur densamma. Skildringen är synnerligen allsidig, vilket framgår av kapitelrubrikerna: Kameran, Kamerans inställning samt negativets exponering, Negativets framställning, Den positiva bildens framställning genom kopiering eller förstoring, Fotografering vid artificiellt ljus, Bildens färdigställande, Bildkritik.

Sätt boken i händerna på ungdomen, och sök att väcka intresse för den ädla konst som fotografien verkligen är, då den bedrives på rätt sätt, d. v. s. då den fotograferande kan sin sak och själv utför det fotografiska arbetet. Hur många »knäppande» ungdomar kunna numera framkalla en plåt? För några tiotal år sedan var det en given sak, att man gjorde det själv. Skulle ej intresset kunna väckas i samband med det självständiga arbetet i det nya gymnasiet? Många tacksamma och lärorika uppgifter, lämpliga för dylikt arbete kunna säkerligen hämtas från fotografiens område.

E. HUBENDICK, *Bragdernas män inom svensk teknik.* Wahlström & Widstrand, Stockholm 1928, 174 sid., kr. 5: 25.

Sedan planerna på en större pojkbok om svenska tekniska stormän och deras verk — med bidrag av skilda författare —

tills vidare måst skrinläggas, har förlagsfirman utsänt denna volym, som omfattar de uppsatser avsedda för denna pojkbok, som författats av prof. HUBENDICK. Denna bokens tillkomst kanske förklarar dess något heterogena innehåll. Bland bragdernas män finner man främst våra stora namn: OLOF RUDBECK, CHRISTOPHER POLHEM, JONAS ALSTRÖMER, JOHN ERICSSON, SAMUEL OWEN och därefter några representanter för en senare tid: O. E. CARLSUND, Svenska banbrytare inom flygmaskintekniken såsom BRISSANDER, NYBERG, de LAVAL, prof. J. E. CEDERBLOM, och i kapitlet »Om hur fyra arbetare gjorde sitt land känt» skildras primuskökets tillkomst.

Med särskilt intresse läser man om prof. CEDERBLOM och hans banbrytande arbete på hydro- och aerodynamikens område. Läsaren får ett starkt intryck av denne de tekniska vetenskapernas skicklige och blygsamme arbetare, som ej gjorde »anspråk på någon annan förtjänst än att i tillgivenhet för de idéer, åt vilka han ägnat sina krafter, icke stå efter någon».

Språket — icke alltid det bästa — är mångenstädes tungt, varför det torde vara tvivelaktigt, om skildringarna kunna fånga de unga läsarnas intresse i någon högre grad.

ERIK NILSSON, *Astronomi för realskolan.* C. E. Fritzes förlag, Stockholm 1928, 68 sid., kr. 2: 25.

Det mest framträdande draget i denna lärobok är det goda illustrationsmaterialet och de många enkla modeller förf. använder för att levandegöra de celesta fenomenen, såsom t. ex. anordningar för att klargöra uppkomsten av en planetslinga, för att påvisa nodlinjens betydelse för uppkomsten av sol- och månförmörkelser, apparat för att demonstrera, hur en fallande kropp slår ned öster om lodpunkten m. m. Förf. har synbarligen lagt ned ett stort arbete för att åstadkomma lämpligt åskådningsmateriel och även lyckats härmed. Framställningen är klar och den meddelade kursen — egentligen avsedd för realskolan — så fyllig att den mycket väl räcker för det nya latingymnasiets andra ring, och troligen kommer ej mycket mer att medhinnas i det nya realgymnasiets första ring. Några elevföredrag kunna måhända komplettera, vad som fattas.

Läroboken synes väl fylla sitt ändamål.

ALFRED PETTERSSON, *Luften och klimatet samt deras inverkan på människan.* I serien »Bonniers små handböcker i vetenskapliga ämnen», Stockholm 1928, 107 sid., häft. kr. 2: 75.

På detta hundratal sidor i liten oktav lyckas prof. ALFRED PETTERSSON ge en synnerligen allsidig behandling av ämnet, mästerlig i klarhet och koncentration, lättläst tillika.

I samband med en ingående beskrivning av luften i dess normala tillstånd — omfattande alla vanliga meteorologiska data — skildras de anomala förhållanden, som förorsakas av tillfälliga beståndsdelar och föroreningar i luften och av extrema variationer i temperatur och tryck samt de funktionsrubbningar i den mänskliga organismen, som därav åstadkommas. På ett intressant sätt belysas de stora anomalier, som organismen kan fördraga och anpassa sig efter.

Boken avslutas med ett par kapitel om olika klimattyper och om klimatets och årstidernas inverkan på sjuklighet och dödlighet.

Det lilla arbetet är ett utmärkt, allmänbildande supplement till skolans av naturliga skäl knapphändiga kurs i meteorologi.

N. V. E. NORDENMARK, *Stjärnklara kvällar.* I serien »Bonniers små handböcker i vetenskapliga ämnen». Stockholm 1928, 92 sid., häft. kr. 2: 50.

Det är författarens radioföredrag under hösten 1927 och våren 1928, vilka här sammanförts i bokform under samma titel som ett tidigare arbete med vilket det dock endast har titeln gemensam.

Sin uppgift som en första vägledning fyller den lilla boken mycket bra. Vid beskrivningen av de olika årstidernas stjärnhimmel utväljer förf., vad som är mest ägnat att ge läsaren en föreställning om universums byggnad och får då tillfälle att relatera åtskilligt av de senare årens epokgörande forskningsresultat. — En stjärnkarta medföljer.

C. LUPLAU JANSSEN, *Er stjernerne beboet?* Gyldendalske Boghandel, København 1928, 208 sid., häft. kr. 4: 50.

Den danske astronomen LUPLAU JANSSEN har här i populär form men på samma gång vetenskapligt vederhäftigt skildrat detta problem ur historisk, biologisk och astronomisk synpunkt.

Hans historiska översikt av huru åsikterna i denna fråga utvecklats är samtidigt en fängslande skildring av olika tiders världsåskådningar. Äro vi med vårt ökade vetande om universum och dess lagar närmare frågans besvarande? Icke mycket. Men vi kunna tack vare detta vetande ge problemet en fastare form och ange, vad som kräves för dess lösning. Och detta gör författaren genom att relatera, vad biologien har att säga om villkoren för organiskt liv och vad astronomien förtäljer om himlakropparnas fysikaliska egenskaper och varest de förhållanden

kunna tänkas existera, vilka svara mot de biologiska existensvillkoren.

Ett 40-tal illustrationer pryda framställningen; flera bilder av äldre datum ha ej förut varit publicerade.

V. BJERKNES, *Teoretisk fysikk.* I del. Vektoranalyse, Fysikkens geometriske og kinematiske forudsetninger. Forlagt av H. Aschehoug, Oslo 1928, 80 sid., kr 3: —.

Om boken skriver författaren till förlaget bl. a.:

»Denne fremstilling av den teoretiske fysikk kommer til å begrenses til hvad man nu betegner som det klassiske område. Dette har holdt sig uforandret under de omveltninger som den moderne atomfysikk har foranlediget, og det danner fremdeles utgangspunkt for vår tids forsøk på å finne fast form i det nye. I min fremstilling har jeg bygget på de erfaringer jeg i forskjellige stillinger har gjort som lærer på dette område nu i 35 år. Mitt mål har stadig vært å komme fra de gamle parallellfremstillinger av den teoretiske fysikks forskjellige grener — med stadige gjentagelser fra gren til gren — til en konsis og oversiktlig enhetsfremstilling.»

Att prof. BJERKNES vid sin läroverksamhet i sällsynt hög grad lyckats förverkliga dessa sina avsikter med avseende på en översiktlig och enhetlig framställning, torde var och en kunna intyga, som haft förmånen att få räkna prof. B. till sina lärare. Och det vittnesbördet är nog varje åhörare av prof. B.:s föreläsningar i teoretisk fysik villig att lämna, att på ett klarare och mera lättfattligt sätt torde ingen ha introducerat sina elever i sin vetenskap. Det är därför synnerligen glädjande att se resultatet av detta mångåriga arbete i tryck, och hedrande för författaren liksom för förläggaren är, att boken kunnat utgivas på norskt språk.

Arbetet skall utkomma i två delar, av vilka den första skall omfatta de matematiska grunderna, först och främst vektorläran. Detta första häfte — vektoranalys — utgör ungefär en tredjedel av första delen. Den andra delen blir av samma omfattning som den första, och enligt planen för arbetet beräknas det vara färdigt inom två år.

Särskilt må framhållas, att boken — till skillnad från de flesta större läroböcker i detta ämne — ej förutsätter djupare matematiska kunskaper, endast elementen av den analytiska geometrin och differentialkalkylen.

Gradualavhandlingar.[1]

GUNNAR HÄGG, *X-Ray Studies on the Binary Systems of Iron with Nitrogen, Phosphorus, Arsenic, Antimony and Bismuth.* Uppsala 1929, 96 sid. + 10 planscher. Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Disp. i Stockholm den 29 april. Opponenter: prof. G. AMINOFF och fil. mag. H. ARNFELT.

Föreningar tillhörande systemet järn-kväve, eller med andra ord järnnitrider, ha framställts genom inverkan av ammoniak på järn. Kvävehalter upp till något över 11 viktsprocent ha därigenom erhållits. Inom koncentrationsområdet 0 — 11,2 procent ha tre intermediära faser kunnat påvisas. Den kvävefattigaste av dessa har formeln Fe_4N. Varje elementarcell innehåller fyra järnatomer, som bilda ett kubiskt ytcentrerat gitter, samt en kväve-atom, som troligen är placerad i det största hålrummet mellan järnatomerna.

Nästa fas har ett homogenitetsområde från c:a 8 till 11 viktsprocent kväve. Järnatomerna bilda här ett hexagonalt tätpackat gitter, vars dimensioner ökas med stigande kvävehalt. Kväveatomerna äro sannolikt slumpvis fördelade i mellanrummen i järngittret.

Stiger kvävehalten något över 11 procent, uppträder en rombisk fas, vars struktur är synnerligen nära besläktad med den föregående hexagonala fasens. Det har ej varit möjligt att fastlägga kväve-atomernas lägen i gittret; det är emellertid mycket möjligt, att de även här äro slumpvis fördelade i järngittrets mellanrum.

En diskussion över egenskaperna hos olika nitrider har fört till det resultatet att nitriderna av övergångselementen (exempelvis av elementserien Sc-Ni) sannolikt äro av en helt annan typ än nitrider av övriga element. Särskilt framträdande är deras höga elektriska ledningsförmåga, som är av samma storleksordning som för metaller. De hava även ofta analoga och mycket enkla kristallstrukturer. Det visar sig även, att de flesta egenskaper hos övergångselementens nitrider variera kontinuerligt med utfyllandet av elektrondefekterna i de inre kvant-nivåerna.

I systemet järn-fosfor ha tre intermediära faser påvisats inom det undersökta koncentrationsintervallet. Den fosforfattigaste av dessa har formeln Fe_3P och kristalliserar rymdcentrerat tetragonalt med åtta molekyler Fe_3P inom elementarcellen. Nästa fas har formeln Fe_2P och kristalliserar hexagonalt med tre mole-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande författares egen hand.

kyler Fe_2P inom elementarcellen. Följande fas har antagligen formeln FeP, men då inga kristaller, som kunnat möjliggöra upptagningar av LAUE- och BRAGG-fotogram ha bildats ur smältorna, ha bestämda data angående kristallstrukturen ej kunnat erhållas.

Systemet järn-arsenik har undersökts inom ett koncentrationsområde upp till c:a 57 viktsprocent arsenik. Inom detta område finnas tre intermediära faser. Den arsenikfattigaste har formeln Fe_2As och kristalliserar tetragonalt med två molekyler Fe_2As per elementarcell. Nästa fas vars homogenitetsområde ligger någonstädes mellan 40 och 50 viktsprocent arsenik existerar endast vid temperaturer över 795° C. Den sönderfaller så hastigt under denna temperatur, att pulverfotogram av härdade prov av denna sammansättning ej visa minsta spår av fasen i fråga. Den arsenikrikaste av de tre undersökta faserna har formeln FeAs och kristalliserar rombiskt med fyra molekyler FeAs per elementarcell. Man hade haft stor anledning förvänta att FeAs skulle visat s. k. nickelarsenidstruktur, en hexagonal struktur, som påvisats hos NiAs, FeS, NiSb, CoSb samt ett stort antal andra analogt uppbyggda föreningar. En närmare undersökning visade emellertid, att FeAs sannolikt har en deformerad nickelarsenidstruktur, d. v. s. symmetrien har genom jämförelsevis obetydliga ändringar av de mot nickelarsenidstrukturen svarande atomlägena sänkts från hexagonal till rombisk.

I systemet järn-antimon har påvisats två intermediära faser. Den järnrikaste av dessa hade ett homogenitetsområde från 63,5 till 65,5 viktsprocent antimon. Den visade sig hava typisk nickelarsenidstruktur, oaktat den av denna struktur fordrade formeln FeSb (med 68,6 procent antimon) ligger utanför homogenitetsområdet. Genom ett studium av elementardimensionernas och specifika viktens ändringar med antimonhalten har emellertid direkt kunnat påvisas, att fasen utgör en fast lösning av järn i FeSb, där järnatomerna äro slumpvis inlagrade i atommellanrummen i det gitter av nickelarsenidtyp, som bildas av FeSb. Denna sistnämnda förening kan alltså ej existera med mindre den har löst en viss mängd järn.

Den andra intermediära fasen i systemet järn-antimon har formeln $FeSb_2$ och kristalliserar rombiskt med två molekyler $FeSb_2$ i elementarcellen i en struktur, som är analog med markasitens.

Vad angår systemet järn-vismut ha de förut genom andra metoder erhållna resultaten endast kunnat bekräftas genom föreliggande röntgenundersökning. De två metallerna äro ej blandbara och bilda sinsemellan inga kemiska föreningar.

HJALMAR GRANHOLM, *On the Elastic Stability of Piles Surrounded by a Supporting Medium*. Stockholm 1929, 56 sid. Disp. vid Tekniska Högskolan den 25 april 1929. Opponenter: prof. CARL FORSELL och byråingenjör NILS ROYEN.

JOHN WENNERBERG, *Hunting Constants of Synchronous Machines* (Synkronmaskiners pendlingskonstanter). Västerås 1929, 100 sid. Disp. vid Tekniska Högskolan den 10 maj 1929. Opponenter: prof. E. ALM och docent R. LUNDHOLM.

FREDRIK DAHLGREN, *A General Elektromagnetic Theory of Electric Machines*. Stockholm 1929, 86 sid. Disp. vid Tekniska Högskolan den 14 maj 1929. Opponenter: prof. E. ALM och byråingenjör EDY VELANDER.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årg. XLI, 1929, häft. 3 o. 4.

Ur innehållet i n:r 3: E. HÄGGLUND und T. JOHNSON, Ueber die Veränderung der Zuckerarten im Verlaufe der Sulfitzellstoffkochung II. — B. HOLMBERG, Konfigurationsbestämningar vid spegelbildisomerier. — Ur n:r 4: L. RAMBERG, Rationella degeltänger för analytiskt bruk. — O. STELLING, Risker för förgiftning vid arbete med kvicksilver. — H. v. EULER, H. NILSSON und D. RUNEHJELM, Katalatische Wirkungen einiger eisenhaltiger Verbindungen. I båda häftena Meddelanden från Sveriges kemiska industrikontor.

Vetenskapen och livet. Årg. XIV, 1929, häft. 3, 4 o. 5. Hugo Geber. Kr. 1: — per häfte om 48 sid.

Ur innehållet i n:r 3: Vad är blixten? — Malmletning i Sverige och dess senaste triumf. — Metallernas egenskaper (hållfasthet m. m.). — Turbin som utnyttjar havsströmmarnas och vindens energi. N:r 4: Den gröna norrskenslinjens hemlighet. — Vad menas med kemisk frändskap? — Automattelefonen. — Metallers och legeringars byggnad och egenskaper. N:r 5: De infraröda strålarna ha fått praktisk användning. — Kikare-mikroskop och distanslupp. — Ultraljud. — Försteningarna berätta om en förgången värld. — Nya patent.

Era. *Elektricitetens rationella användning*. Årg. 1929, häft. 3 o. 4. Per år kr. 5: —, per häfte 50 öre.

Ur innehållet i n:r 3: Rundradion och starkströmsstörningarna. — Vattenfallsstyrelsens krafttillgångar och utbyggnadsplaner i Mellansverige. — Kvicksilverlikriktarnas utveckling. — Lufabelysning. — Tekniska nybeter. N:r 4: Distributionsföreningarnas

ekonomi och framtidsutsikter. — Elektrotransport. — Fasadbelysningens teknik. — Svenska elektriska materialkontrollanstaltens förteckning (n:r 1) över godkänd installationsmaterial.

Industritidningen Norden. Årg. 1929, häft. 11—19. Ett nummer varje vecka; per år kr. 12: —.

Ur innehållet: Eastman Kodacs nya färgfilm. — Luth & Roséns kuggväxelmotorer. — Ny metod för elektrisk upphettning av metaller. — Regenerering av svartlut enl. HÄGGLUND. — De radioaktiva elementens praktiska användning. — Prof. THUNBERGs apparat för konstgjord andning. — En ny värmeöverföringsprincip. — Uppfinningar inom kriminaltekniken. — Järnlegeringar med krom eller volfram. — Metallografiska institutets vetenskapliga arbete under 1928. — Tio års tekniskvetenskaplig forskning, föredrag av kommerserådet AXEL P. ENSTRÖM (mycket intressant!). — Om den s. k. vetenskapliga äganderätten. — Dessutom beskrivningar av nya patent och uppfinningar.

Radioamatören, årg. VI, 1929, häft. 1—5, månatligen ett häfte om 28 sid. à 50 öre. Göteborgs Litografiska Aktiebolag.

Ur innehållet: Ett flertal beskrivningar av nya apparater och kopplingar. — Värdefulla översikter över utländsk radiolitteratur. — Våglängdstabeller. — Bildradio, system Fultograph. — Radiotekniken i luftfartens tjänst. — Talande film. — Bildradio, radiobiograf och television.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Organ for Norsk Matematisk Forening. Årg. 11, 1 Hefte.

Ur innehållet: WILHELM LOREY, Abels Berufung nach Berlin. — FR. LANGE-NIELSEN, Abel og »Académie des Sciences» i Paris. — O. SIEVERTZEN, En metode for tilnærmet 3-deling av vinkelen, som muligen kan være benyttet av de gamle egypter. — Boganmeldelser. — Opgaver til løsning.

Matematisk Tidsskrift. Udgivet af Matematisk Forening i København. Aarg. 1929, 1 Hefte.

Ur innehållet i den elementära avd. A. T. BONNESEN, Om- og inskrivelige firkanter. — D. FOG, Om Determinanter af 2. og 3. Orden. — JAKOB JENSEN, Et par bemærkninger om den rette linjes ligning. — Opgaver til Løsning og til Undervisningsbrug. Ur den vetenskapliga avd. B: C. JUEL, Bestemmelse af et Polyeders Tyngdepunkt uden infinitesimale Forudsætninger. — G. M. STENSIG, Nogle Anvendelser af Lagranges Række. — Litteraturanmeldelser.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

327) Visa, att

$$n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$$

är delbart med 128, om n är ett helt udda tal.

328) Visa, att ett uddasiffrigt tal, vars första siffra är 1 eller 8 och vars alla följande siffror äro treor icke kan vara ett primtal. *Iter.*

329) m och n äro två hela positiva tal, $m > n$. När finnes en rätvinklig triangel och en tillhörande aritmetisk serie sådan, att triangelns kateter och hypotenusa mätas av resp. s_m, s_n och s_{m-n} i serien? ($s_r = \sum_1^r u_r$, om serien är $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$) *X.*

330) Att konstruera en triangel, då man känner längden av en sida, läget av de höjders fotpunkter, vilka fällas mot de två andra sidorna samt vet, att den tredje höjdens fotpunkt ligger på en given obegränsad rät linje. *C. A. Mebius.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

331) Lös ekvationen

$$(\log x)^2 + \log x^2 + \log 2x = \log 20\,000.$$

Svar: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-4}$.

332) Visa, att

$$\cos^2 x + \cos^2(60^\circ + x) + \cos^2(60 - x)$$

har ett konstant, av x oberoende värde.

333) I en cirkel med radien r är ett parallelltrapets inskrivet, så att tre av dess sidor ligga på avståndet a från medelpunkten. Visa, att trapetsets höjd är

$$4a\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).$$

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

334) I en likbent triangel äro de lika sidorna vardera 2 cm. Beräkna basen, om den inskrivna cirkelns radie skall vara ett maximum. Svar: $2(\sqrt{5}-1)$ cm.

335) P är en rörlig punkt på en hyperbel, F_1 och F_2 äro dess brännpunkter. Visa, att orten för medelpunkten till den cirkel, som inskrives i triangeln PF_1F_2, är vertextangenten.

336) Ytan av en triangel är A. Ytan av den triangel, vars sidor utgöras av den förstas medianer, är A_1. Visa, att

$$4A_1 = 3A.$$

Lösningar till uppg. 307—310.

307) *Lös ekvationen*

$$x^5 + 45b^4x - 54b^5 = 0.$$

C. A. Mebius.

Sätt $x = by$; ekvationen blir då

$$y^5 + 45y - 54 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dividerar man vänstra ledet i (1) med $y^2 + py + q$, får man som villkor för att divisionen skall gå jämnt upp sambanden

$$p^2(3q - p^2) = 45 + q^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$pq(2q - p^2) = -54 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Antager man nu p och q vara hela tal, måste, enär 54 är delbart med 2 men ej med 4, p vara udda och q jämnt. För $q = 2r$ blir (3)

$$pr(4r - p^2) = -27$$

som tydligen ger $p = -3$, $r = 3$, alltså $q = 6$. Dessa värden satisfiera även (2).

Ekvationen (1) kan då efter uppdelning skrivas:

$$(y^2 - 3y + 6)(y^3 + 3y^2 + 3y - 9) = 0$$

varur man omedelbart erhåller

$$y_{1,2} = \tfrac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{15}); \quad y_{3,4,5} = -1 + \sqrt[3]{10}$$

och alltså blir den ursprungliga ekvationens rötter

$$x_{1,2} = \frac{b}{2}(3 \pm i\sqrt{15}); \quad x_{3,4,5} = b(-1 + \sqrt[3]{10}).$$

B—r.

Även löst av *X*.

308) *Att i en given ellips inskriva en triangel med största möjliga yta, då en vinkelspets befinner sig i en given punkt på ellipsen.* *C. A. Mebius.*

Drag genom den givna punkten A diametern AE. Dela radius vector OE mitt itu i D. Drag kordan BC parallell med AE:s

konjugatdiameter. Då äro B och C de övriga vinkelspetsarna, vilka sammanbindas med A. Konstruktionens riktighet inses, om man betänker, att $\triangle ABC$ utgör projektionen av en i ellipsens omskrivna cirkel inskriven liksidig triangel (maximitriangeln).

Löst av *S. G. A.*

Anm. Uppgiften finnes med lösning intagen som ex. 496 i NYSTRÖM-OLSONS Funktionslära och Analytisk geometri.

309) *Att upprita en triangel, då man känner två sidor och den från deras gemensamma vinkelspets utgående bissektrisens lutningsvinkel mot basen.* *Iter.*

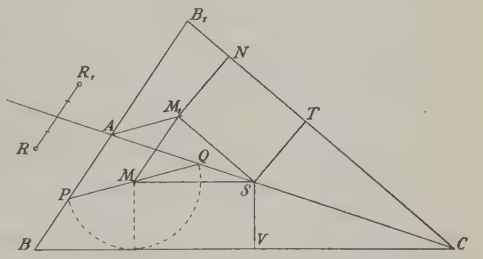
De givna sidorna kallas a och b; vinkeln v. Avsätt på en rät linje sträckorna $AB = a$ och $BC = b$. Sätt i B en vinkel $CBD = v$. Drag mittnormalen till AC; den skär DB i E. Upprita en cirkel, som går genom A, E och C; denna cirkel skär BD ånyo i F. Drag AF och CF.

Då är tydligen BF bissektris till vinkeln AFC och $AF : CF = a : b$. Triangeln är då likformig med den sökta, som fås genom att avsätta $FG = a$ på FA och $FH = b$ på FC samt draga linjen GH.

B—r.

Även löst av *A. A.*, *Cevas* och *X.*

310) *AB, BC och CA äro tre givna linjer. Man betraktar alla cirklar, som tangera BC så, att en av dess diametrar har ena ändpunkten på AB och den andra på AC. Sök orten för cirkelns medelpunkt.* *X.*



Figuren underkastas »sned symmetrisering» med avseende på t. ex. AC, så att den linje, som förenar motsvarande punkter R och R_1 är parallell med AB och har sin mittpunkt på AC. Cirkelns medelpunkt M övergår i M_1, B i B_1, linjen BC i B_1C, den med BC parallella linjen MS i den med B_1C parallella M_1S o. s. v. Drag AM_1 och normalen M_1N mot B_1C. Då är $MM_1 = PA$ och $APMM_1$ en parallellogram, varav $AM_1 = PM = MQ = r$. Drag även $SV \perp BC$ och $ST \perp B_1C$. Ur fig. fås

$$\frac{AM_1}{M_1N} = \frac{SV}{ST} = \frac{AB \sin B}{AB_1 \sin B_1} = \frac{\sin B}{\sin B_1}$$

d. v. s. orten för M_1 är ett kägelsnitt med ena brännpunkten

i A, tillhörande styrlinje B_1C och excentriciteten $e = \frac{\sin B}{\sin B_1}$. Orten för M är då till följd av transformationens karaktär ett kägelsnitt av samma typ.

Diskussion:

Om $\angle A < 90°$, är $B_1C > BC$ och $e > 1$ ∴ orten en hyperbel.
» $\angle A > 90°$, » $B_1C < BC$ » $e < 1$ ∴ » » ellips.
» $\angle A = 90°$, » $B_1C = BC$ » $e = 1$ ∴ » » parabel.

X.

Insänd litteratur.

R. W. Pohl, *Einführung in die Elektrizitätslehre.* Zweite verbesserte Aufl., Julius Springer, Berlin 1929, 259 sid. (393 fig.), RM 13: 80.

Helge Holst og H. A. Kramers, *Bohrs atomteori*, almenfatteligt fremstillet; anden ændrede og udvidede Udgave under medvikning af O. Klein. Gyldendalske Boghandel, København 1929, 168 sid.

C. A. Bjerknes, *Niels Henrik Abel*, En skildring av hans liv og arbeide; omarbeidet og forkortet utgave ved V. Bjerknes. Forlagt av H. Aschehoug, Oslo 1929, 155 sid., kr. 3: 50, indbundet kr. 5: 25.

V. Bjerknes, *Teoretisk fysikk.* I del. Vektoranalyse, Fysikkens geometriske og kinematiske forudsetninger. H. Aschehoug 1928 (se sid. 242).

Magnus Alfsen, *Trigonometri for gymnasiet.* Forlagt av H. Aschehoug, Oslo 1928, 91 sid.

S. Brodetsky, *Isaac Newton*, en kort beskrivning av hans liv och verk. C. W. K. Glerup, Lund, 1928, 171 sid., häft. kr. 4: 75.

E. Hubendick, *Bragdernas män inom svensk teknik.* Wahlström & Widstrand (se sid. 239).

Jakob Kristofferson, *Sprängämnen och skjutvapen förr och nu.* J. A. Lindblads förlag, Uppsala 1928 (se sid. 237).

Helmer Bäckström, *Lärobok i fotografi.* Wahlström & Widstrand (se sid. 239).

B. Colbjörnsen, *Om konstgödselmedel och deras framställning.* H. Geber 1929 (se sid. 237).

John Boman — Sven Wikberg, *Läsebok för realskolans högre klasser.* Svenska Bokförlaget (se sid. 238).

Hjalmar Olson, *Algebra med planimetri och stereometri för latingymnasiet.* Norstedt & Söners förlag (Svenska Bokförlaget). Första delen: 82 sid., pappersb. kr. 2: 90. Andra delen: 86 sid., pappersb. kr. 2: 90.

Kunskap, universitet för alla, en handbok i vår tids humanistiska och naturvetenskapliga vetande. Band IV, häftena 1 och 2, *Matematik* av K. G. Hagström och *Astronomi* av Sten Asklöf. Varje häfte 48 sid.

Stockholms gasverk 1853—1928, Minnesskrift, Stockholm 1928, (se sid. 237).

Uppfinningarnas bok, del IX, P. A. Norstedt & Söner, 1929 (se sid. 238).

Erik Nilsson, *Astronomi för realskolan.* C. E. Fritze, 1928 (se sid. 240).

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1929.[1]

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. I en triangel ABC är vinkeln A 60°. De från motstående hörn mot sidorna AB och AC dragna höjderna äro resp. 2 cm och 6 cm. Beräkna triangelns vinklar.
2. Två cirklar, av vilka den ena har radien r, den andra radien $\frac{r}{3}$, tangera varandra utantill i punkten A. En gemensam tangent berör cirklarna i B resp. C. Beräkna ytan (uttryckt i r) av den mellan cirkelperiferierna och tangenten belägna figuren ABC.
3. Man sätter
$$^{10}\log 2 = a.$$
Beräkna (utan användning av tabell)
$$^{25}\log 800$$
uttryckt i a.
4. I en trekantig pyramid är basytan en liksidig triangel, och de tre från toppen utgående kantlinjerna äro inbördes lika långa. Pyramidens hela yta är fyra gånger så stor som basytan. Beräkna den vinkel, som sidoplanen bilda med basplanet.
5. En skuld, som från början var 16 000 kr., löpte under 10 år med 5 % årlig ränta på ränta. Vid tionde årets slut återbetalades 7 000 kr., och samtidigt ändrades räntefoten för det återstående skuldbeloppet, som efter denna nya räntefot förräntades under 30 år. Vid slutet av det trettionde året var skulden 71 395 kr. Vilken var den nya räntefoten?
6. I en rätvinklig triangel drages höjden mot hypotenusan. För en punkt på denna höjd betraktar man summan av kvadraterna på avstånden från punkten till triangelns tre sidor. Var på höjden skall punkten ligga, för att sagda summa skall bli så liten som möjligt?
7. Ett klot delas medelst ett plan i tvenne delar (segment). I det större av dessa segment inskrives en rät cirkulär kon så, att konen till bas har segmentets plana yta och att dess

[1] Fullständiga lösningar återfinnas i Svenska Dagbladet för den 7 och 13 april 1929.

topp ligger på klotets yta. Hur stort skall planets avstånd från klotets medelpunkt vara, för att konens mantelyta skall vara lika stor som det mindre klotsegmentets buktiga yta?

8. I en triangel ABC betecknas sidorna med a, b och c så, att a är den sida, som står mot vinkeln A, o. s. v. Visa, att om vinkeln B är 60° större än vinkeln C, så är
$$(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2 - bc).$$

Resultat: **1.** Vinkeln $B = 19,^\circ 11$ och vinkeln $C = 100,^\circ 89$. **2.** $\frac{r^2(24\sqrt{3} - 11\pi)}{54} = 0,1298r^2$. **3.** $\frac{2 + 3a}{2 - 2a}$. **4.** $70,^\circ 53$. **5.** 4,5 %. **6.** I höjdens mittpunkt. **7.** $r(\sqrt{5} - 2) = 0,2360r$, om r är klotets radie. **8.** Drag transversalen BD, som skär AC i D, så, att vinkeln $ABD = 60^\circ$. Sättes $BD = CD = x$, så fås ur $\triangle ABC$ enligt STEWARTs teorem $x = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2 - c^2}$ och ur $\triangle ABD$ enligt cosinusteoremet $x = \frac{b^2 - c^2}{2b - c}$, varav påståendet lätt framgår.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Två sidor i en triangel förhålla sig som 45 : 56, och de motstående vinklarna förhålla sig som 2 : 3. Hur stora äro triangelns vinklar?
2. På axeln till parabeln $y^2 = 2px$ väljes punkten P så, att de båda tangenterna från P till parabeln bilda 60° vinkel med varandra. Bestäm ekvationen för den cirkel, som går genom P och de båda tangeringspunkterna för de nämnda tangenterna.
3. I den oändliga serien
$$1 + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^5 x - \ldots$$
ha de två första termerna tecknet +, de två följande tecknet —, de därpå två följande tecknet +, o. s. v. För positiva vinklar x mindre än 45° är serien konvergent. Beräkna det största värde, som summan kan få för något dylikt värde på x.
4. En cirkel har medelpunkten O. Från en yttre punkt A drages en tangent till cirkeln; tangeringspunkten är B. Då figuren roterar kring (den utdragna) linjen OA, så alstras av cirkeln ett klot och av triangeln OAB en dubbelkon. Hur stort är avståndet AO (uttryckt i cirkelns radie), om denna dubbelkon har halva sin volym utanför klotet?

5. I de båda polynomerna

$$4x^2 + ax - 1 \text{ och } 4x^2 + bc + c$$

skola koefficienterna a, b och c bestämmas så, att polynomerna få samma värde för $x = 1$. Vidare skola rötterna till den ekvation, som erhålles, då den första polynomen sättes $= 0$, vara tre enheter mindre än var sin av rötterna till den ekvation, som fås, då den andra polynomen sättes $= 0$. Vilka äro värdena på a, b och c?

6. O är origo i ett rätvinkligt koordinatsystem. En triangel ABC har spetsen A i punkten $(-1, -2)$. Spetsen B ligger på räta linjen $x + 5 = 0$, spetsen C på räta linjen $y - 3 = 0$. Vidare råka triangelns höjder varandra i O. Beräkna triangelns yta.
7. Tre cirklar med radierna a, b, c tangera varandra två och två utantill. Hur stor är radien i den cirkel, som går genom de tre tangeringspunkterna?
8. En kub har kantlinjen a. Genom vart och ett av dess hörn lägges ett plan, som är parallellt med planet genom ändpunkterna av de tre kantlinjer i kuben, vilka utgå från hörnet i fråga. Dessa plan begränsa en kropp, vars yta och volym skola beräknas.
9. Att i en given cirkel inskriva en triangel ABC, i vilken vinkeln A är lika med en given vinkel, och summan av de omfattande sidorna AB och AC är lika med en given sträcka.

Resultat: **1.** 51°,68, 77°,52 och 50°,80. **2.** $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2$. **3.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **4.** $3r$, om r är cirkelns radie. **5.** $a = 4$, $b = -20$, $c = 23$. **6.** 70 ytenheter. **7.** $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$. **8.** Ytan $9a^2\sqrt{3}$, volymen $= \frac{9a^3}{2}$. **9.** Lösas med hjälp av den kända ortsatsen för summan av två triangelsidor; se t. ex. CASSELs anteckningar.

Uppgifter i fysik.

1. En lastbom på ett fartyg utgöres av en homogen cylinder, vars nedre ände genom en led är fäst vid en vertikal mast, så att bommen är vridbar i ett plan genom masten. Den övre änden är med en kätting förbunden med en punkt på masten, så att kättingen bildar 30° vinkel med horisontallinjen och 90° vinkel med bommens längdriktning. Bommen

väger 100 kg. Beräkna storleken av den kraft, som verkar på bommens nedre ände.

2. En kula är fäst vid mitten av ett fint, viktlöst snöre av 100 cm längd, vars ändar äro fastsatta vid en smal, vertikal stång på 80 cm avstånd från varandra. Stången försättes i rotation kring sin vertikala axel, varvid kulan rör sig på en horisontell cirkel med konstant hastighet. Beräkna förhållandet mellan spänningarna i snörets båda delar, då kulans omloppstid är 1 sek. Accelerationen vid fritt fall är 981 cm/sek^2. Snöret lindar ej upp sig på stången. Denna är så smal, att man kan anse snörets ändar fästa på rotationsaxeln.
3. För bestämning av värmets mekaniska ekvivalent användes en kalorimeter, som innehåller vatten, en omrörare och en termometer. Omröraren är så konstruerad, att dess rotation åstadkommer en avsevärd friktion i vattnet. Den försättes i rotation medelst en vertikal axel, som upptill är försedd med en horisontell trissa av 10 cm radie. Genom en över trissan lagd rem kan rörelsen från en motor överföras på trissan och omröraren. Det statiska moment, som härvid kringvrider trissan, åstadkommes av kraften 9 600 grf, verkande på hävstångsarmen 10 cm (trissans radie). Vid ett försök innehöll kalorimetern 620 gr vatten. Då omröraren gjort 436 varv, hade temperaturen hos kalorimetern med innehåll stigit 9°,6 C. Försöket upprepades med 1 000 gr vatten i kalorimetern. Temperaturstegringen 9°,6 C uppnåddes först, då omröraren gjort 694 varv under inverkan av samma kraftmoment. Beräkna härav värmets mekaniska ekvivalent. Hänsyn bör tagas även till den värmemängd, som upptages av omröraren, kalorimeterkärlet och termometern.[1]
4. En person inställer en astronomisk kikare, så att han i densamma tydligt ser bilden av ett mycket avlägset föremål. Avståndet mellan objektiv och okular är då 50 cm, och kikaren förstorar 24 gånger. Observatören inställer därefter kikaren på ett jämförelsevis nära beläget föremål. För att bilden då skall falla på samma avstånd från ögat som vid föregående inställning, behöver han förskjuta okularet 0,31 cm. Sök det senare föremålets avstånd från kikarens objektiv.
5. Den buktiga ytan av en tunn, plankonvex glaslins är försilvrad. Centrala strålar infalla parallellt med den optiska huvudaxeln mot linsens plana yta, reflekteras vid den buktiga ytan och brytas vid utgåendet ur linsen vid den plana ytan. Sök strålarnas skärningspunkt, sedan de lämnat linsen.

[1] Uppgifterna införas med originaltextens sortbeteckningar, alltså gr och grf i stället för g och gf.

Radien i den buktiga ytan är 1 m. Brytningsexponenten för glas är 1,5.

6. En inklinationsnåls svängningsplan inställes, så att det bildar 20° vinkel med det magnetiska meridianplanet. Då nålen intagit sitt jämviktsläge, är vinkeln mellan nålens längdriktning och horisontalplanet 72°,5. Det jordmagnetiska fältets vertikala komposant är 0,48 C. G. S -enheter. Beräkna det jordmagnetiska fältets horisontella komposant.
7. Ett batteri av två seriekopplade ackumulatorer, vardera med den elektromotoriska kraften 2 volt, slutes med en metalltråd ACB, som har ett motstånd av 1 000 Ω. Punkten A anslutes till batteriets positiva, B till dess negativa pol. Ackumulatorernas två övriga poler, som äro förbundna med varandra, avledas till jorden och få således potentialen 0. En punkt C på tråden, så belägen, att motståndet AC är 600 Ω, förbindes med den ena klämskruven till en voltmeter med 2 000 Ω motstånd. Voltmeterns andra klämskruv är avledd till jorden och får således potentialen 0. Sök potentialen i punkten C till storlek och tecken. Det inre motståndet hos batteriet och motståndet hos voltmeterns tilledningstrådar kunna lämnas utan avseende.
8. Visa, hur JOULEs lag för den elektriska strömmens värmeverkningar kan härledas på teoretisk väg.

Resultat: **1.** Kraften är $25\sqrt{13}$ kgf $= 90{,}14$ kgf (den bildar vinkeln 16°,10 med bommen och 13°,90 med lodlinjen). **2.** 4,279. **3.** 426,5 kgm/kgcal. **4.** 74,78 m. **5.** $\frac{1}{3}$ m från linsen. **6.** 0,1610 C. G. S.-enheter. **7.** $-\frac{5}{14}$ volt. **8.** Se t. ex. MOLLs lärob. i fysik, del III, 10:e uppl., sid. 77.

Realskolexamen V. T. 1929.

Provräkning.

1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+y}{0{,}5} - \dfrac{3x-y}{0{,}8} = 3{,}75 \\ \dfrac{x+2y}{0{,}4} + \dfrac{3y-x}{0{,}9} = 11\frac{1}{9}. \end{cases}$$

2. Tre åkare, A, B och C, ha för 3 525 kr åtagit sig gruskörning till en väganläggning. A har 5 skjutsar i arbete under 13 dagar, B 7 skjutsar under 14 dagar och C 6 skjutsar under 12 dagar. Hur skola de dela den nämnda summan?

3. En person vill genom inköp av $4\frac{1}{2}$ % obligationer efter $96\frac{1}{2}$ % kurs skaffa sig en årsränta av 1 800 kr. Hur stort kapital måste han disponera för inköp av de härför erforderliga obligationerna?
4. En person ämnade begiva sig cyklande från A till B, en sträcka på 25 km. Emellertid gick cykeln sönder, sedan han färdats halva vägen, varför han måste gå återstoden. Därför framkom han till B 1 timme 40 minuter senare, än han hade beräknat. Hur fort cyklade han, om han gick 5 km i timmen?
5. En person står 20 m från ett träd. För att bestämma trädets höjd håller han en käpp lodrätt och så, att syftlinjen från ögat till trädets topp går genom käppens övre ändpunkt A. Syftlinjen till trädets rotända skär käppen i en punkt, vars avstånd från A uppmätes till 31 cm. Käppens avstånd från ögat uppmätes till 40 cm. Hur högt var trädet?
6. De båda parallella sidorna i ett parallelltrapets äro 7 cm och 4 cm; de båda övriga sidorna äro lika stora. Diagonalerna bilda med de parallella sidorna vinklar om 30°. Beräkna trapetsets yta.
7. Ett öppet litermått, vars inre volym har formen av en kub, är förfärdigat av trä. Väggarna och bottnen äro överallt 1 cm tjocka. Måttet väger 467,2 gr. Vad väger 1 cm^3 trä?
8. En cylindrisk burk, vars basdiameter och höjd äro vardera 5,6 cm, är fylld med färg. Utmålad täcker färgen 3 m^2 8 dm^2. Beräkna färglagrets genomsnittliga tjocklek. ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

Resultat: **1.** $x = 2$, $y = 1$. **2.** A 975 kr, B 1470 kr, C 1080 kr. **3.** 38 600 kr. **4.** 15 km/tim. **5.** 15,5 m. **6.** $\frac{121\sqrt{3}}{12}$ $cm^2 =$ $= 17{,}47$ cm^2. **7.** 0,8 gr. **8.** 0,0448 mm.